

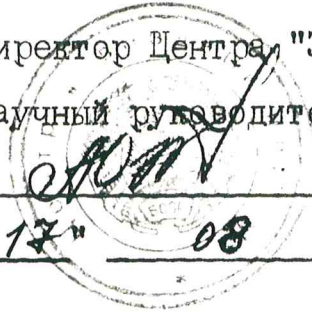
Центр "Звездный мир"

УДК 531.311

Экземпляр № 1

"УТВЕРЖДАЮ"

Директор Центра "Звездный мир",  
научный руководитель программы ОТС

  
А.Э.Юницкий  
" 17 " 08 1989 г.

О Т Ч Е Т

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

"Анализ динамики выхода ОТС в космос в условиях  
планет, имеющих экваториальные кольца.

Задача о маневрировании ротора"

Руководитель В Т К

к.ф.-м.н., доцент ВТИ

Казбан А.М.Казбан

" 8 " августа 1989 г.

Воронеж, 1989

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Юницкий  
Анатолий Эдуардович,  
научный руководитель  
программы ОТС



Разработка общей теории  
движения ОТС; разработка  
общих вопросов задачи о  
маневрировании ротора ОТС

Казбан  
Анатолий Максимович,  
канд. физ.-мат. наук,  
доц. каф. теоретической  
механики Воронежского  
технологического  
института

Казбан

Разделы I - IO

## РЕФЕРАТ

Отчет 62 стр., 6 рис., 4 таблицы, 7 источников.

ОБЩЕПЛАНЕТНОЕ ТРАНСПОРТНОЕ СРЕДСТВО, ДИНАМИКА, УПРАВЛЕНИЕ,  
СИСТЕМА ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ, МАНЕВРИРОВАНИЕ, ОРБИТА

В работе исследуется задача о движении ротора ОТС к орбите в случае, когда планета имеет систему экваториальных колец, спутников и других объектов.

При самых общих предположениях о модели ротора получены дифференциальные уравнения его движения, проведена их линеаризация по одной из обобщенных координат, найдены первые интегралы. Исследована динамика свободного движения ротора (без сил трения между фрагментами), установлено, что ротор совершает колебания относительно положения орбиты, либо – при закритических значениях параметра орбиты – удаляется на бесконечность.

Разработана методика синтеза управляемого движения ротора, совершающего маневр по преодолению произвольной системы экваториальных препятствий; приведены примеры задачи о маневрировании ОТС в условиях Урана и Сатурна.

## СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Список исполнителей .....	2
Реферат .....	3
Содержание .....	4
Введение .....	5
1. Постановка задачи о маневрировании ротора ОТС; принятая модель ротора .....	10
2. Дифференциальные уравнения движения ротора ОТС вне экваториальной плоскости .....	13
3. Методика решения задачи о маневрировании путем перехода к новой независимой переменной .....	18
4. Динамика свободного движения ротора .....	21
5. Динамика управляемого движения ротора .....	31
6. Движение ротора на заключительном этапе .....	38
7. Расчетные формулы для реализации задачи о маневрировании ротора .....	39
8. Задачи о маневрировании ротора в условиях Урана и Сатурна .....	41
9. Выводы и рекомендации .....	55
10. Приложение .....	60
Список литературы .....	62



## В В Е Д Е Н И Е

Исследуется движение ротора ОТС при выходе на орбиту в случае, когда его стартовая позиция находится в плоскости, параллельной плоскости экватора. Этот вариант можно рассматривать как возможный, если условия на экваторе — высокие горные массивы, большие океанские просторы, глубины, волнения и т.д. — затрудняют сооружение стартовой эстакады и проведение старта ротора с экватора. Но самое главное, исследуемое движение ротора позволяет поставить задачу о преодолении на пути к орбите некоторой системы препятствий — естественных в виде колец и спутников или искусственных в виде ранее выведенных роторов, станций, спутников и т.д., расположенных в экваториальной плоскости. Характерные особенности движения позволяют ротору совершить маневр по обходу таких препятствий, выйти на некоторый свободный участок и, погасив часть своего движения, остаться на постоянной орбите; последняя может находиться только в плоскости экватора. При определенном условии ротор может также преодолевать дискретные препятствия (спутники, станции и т.д.), плоскости орбит которых отличаются от экваториальной.

В качестве модели ротора берется тонкое кольцо, состоящее из телескопически соединенных фрагментов, число и размеры которых достаточны для того, чтобы ротор мог выйти на заранее заданную орбиту. Раздвижение фрагментов происходит непрерывно, начиная с момента старта: когда одна группа фрагментов выходит на упоры, начинает раздвигаться следующая. Фрагменты считаются достаточно жесткими, чтобы можно было пренебречь их деформациями при взаимном растяжении силами трения. Считается, что возможны два режима раздвижения фрагментов: 1) без сил трения между фрагментами (свободное расширение ротора); 2) с силами трения между

фрагментами (фрикционное расширение ротора). Оба режима реализуются путем манипулирования величиной нормального давления между фрикционными элементами фрагментов: при отсутствии последнего имеем первый режим, при наличии – второй. Изменяя величину нормального давления, можно менять – в некотором диапазоне – величину силы трения.

В исследуемом случае, кроме радиального расширения и вращения в своей плоскости, ротор имеет дополнительное движение самой этой плоскости по отношению к экватору. В общем случае все три движения имеют колебательный характер. Исследована динамика таких колебаний в случае свободного расширения ротора (без сил трения между фрагментами). При этом найдена зависимость обобщенных координат, определяющих положение ротора, их скоростей и ускорений, а также времени движения в зависимости от безразмерного параметра, связанного с радиусом ротора. Этот факт оказался решающим в задаче о маневрировании ротора, поскольку положение препятствий определяется также этим параметром.

Выявлены критические режимы движения, когда ротор при свободном расширении фрагментов неограниченно увеличивает свои размеры и удаляется на бесконечность. Установлена точная граница докритических и критических режимов движения, связанная со значением стартовой скорости, которая в условиях Земли совпадает со второй космической скоростью. То есть, при значениях стартовой скорости между первой и второй космическими скоростями ротор совершает колебания с конечными размахами относительно постоянной орбиты; в случае, когда стартовая скорость равна или превышает вторую космическую скорость ротор – при свободном расширении – навсегда удаляется от Земли (или другой планеты).

Введение сил трения между фрагментами позволяет отодвигать



границу критического режима в сторону возрастания значения критической стартовой скорости.

Целью настоящего исследования ставилось доказательство принципиальной возможности решения задачи о преодолении ротором произвольной системы препятствий путем специального подбора значений двух параметров.

Первым параметром – при этом постоянным – является величина стартовой скорости ротора; этот параметр связан с положением орбиты ротора, которую следует выбирать из следующих соображений: 1) исходя из целей, поставленных перед данным запуском ротора; 2) наличия соответствующего участка (кольцевой формы) в экваториальной плоскости, свободного от каких-либо препятствий.

Вторым параметром – переменным, в зависимости от положения ротора, – является сила трения между раздвигающимися фрагментами. Она определяется из условия гашения колебательного движения ротора по двум обобщенным координатам, связанным с радиальным движением ротора и колебаниями его плоскости относительно экватора. При этом стабилизируется – в смысле ликвидации колебаний – и движение по третьей координате, связанной с собственным вращением ротора.

Для определения того и другого параметров проведен анализ системы нелинейных дифференциальных уравнений пространственного движения ротора, получены их интегралы в конечном виде, описывающие характерные особенности движения. В частности, выявлено, что ротор – в свободном движении – пересекает плоскость экватора только в единственном положении, совпадающем с положением его постоянной орбиты. С введением сил трения, т.е. при фрикционном расширении, положение, где ротор пересекает экватор, меняется, приближаясь к поверхности планеты. При этом изменяются (уменьша-

ются) скорость и ускорение движения плоскости ротора к плоскости экватора. Это и является основанием к решению задачи о целенаправленном управлении движением ротора с тем, чтобы он мог пройти над выбранной группой препятствий и выйти в плоскость экватора в заданном положении, погасив одновременно колебательное движение свой плоскости.

Осуществлен синтез одного из возможных вариантов такого движения с определением соответствующего управляющего параметра - силы трения между фрагментами.

Дальнейшее движение ротора происходит в плоскости экватора, где оставшееся радиальное движение гасится также путем специального подбора того же управляющего параметра. В итоге ротор подходит к положению, где была определена постоянная орбита, с погашенными колебательными составляющими его движения и установившимся собственным вращением по этой орбите.

Использованный метод решения задачи о маневрировании ротора носит общий характер, но допускает разработку в его рамках множества различных вариантов, удовлетворяющих каким-либо дополнительным условиям, в том числе, возможно, и оптимальных в некотором заранее определенном смысле. Это позволяет применять его в условиях любой планеты с произвольной системой препятствий, удовлетворяющей только одному условию: наличию свободных участков между препятствиями достаточной величины, зависящей от удаленности от планеты: чем дальше такой участок от планеты, тем он должен быть шире. Последнее связано с условиями гашения радиальной скорости, которая тем больше, чем дальше расположена постоянная орбита. Соответственно этому требуется большая ширина свободного участка для гашения такой скорости.

Идея ОТС ценна своей универсальностью: это прежде всего



метод транспортирования больших масс грузов в космос в условиях, когда ракетная техника нерациональна или просто неспособна поднимать какие-либо полезные грузы, например, в условиях планет-гигантов с их огромным притяжением. Если где-то возникла жизнь на большой планете и настал период освоения космоса, то это будет возможно только с помощью роторов ОТС, по крайней мере на первых этапах, пока не открыты какие-либо иные (еще не известные и пока только гипотетические) методы накопления и преобразования энергии. Как это имеет место в Солнечной системе, большие планеты имеют обширные системы колец и спутников, препятствующих движению искусственных объектов в экваториальных плоскостях. Решение задачи о маневрировании ротора ОТС указывает на возможность преодоления таких препятствий и, тем самым, еще более подчеркивает универсальность идеи ОТС.

Можно сказать, очевидно, что ОТС – это наивысшее достижение электромеханического века освоения космоса где-бы то ни было. И оно останется таким – универсальным и наиболее перспективным – если не существуют упомянутые выше гипотетические и при этом, разумеется, более эффективные методы преобразования энергии.

I. Постановка задачи о маневрировании ротора ОТС;  
принятая модель ротора

Исследуется движение ротора ОТС при выводе его на орбиту с начальным положением в плоскости  $\Pi_0$ , параллельной плоскости экватора  $\Pi_1$ . Характерные особенности движения, которые возникают в этом случае, позволяют осуществить маневр по обходу различного рода препятствий на пути к орбите, которая может быть расположена только в экваториальной плоскости планеты.

Пусть в экваториальной плоскости  $\Pi_1$  планеты имеются естественные препятствия в виде колец, спутников, как на планетах-гигантах Юпитере, Сатурне, Уране, или искусственные - другие, ранее выведенные роторы, спутники, космические станции, образующие, возможно, некоторые кольцеобразные структуры и т.д. Расположение и размеры препятствий в общем случае произвольны, но принимается, что поперечные размеры (перпендикулярно плоскости  $\Pi_1$ ) малы по сравнению с размерами планеты; считается также, что между орбитами препятствий имеются некоторые свободные промежутки. Оба допущения практически всегда имеют место; исключения могут составлять лишь крупные естественные спутники, но они удалены, как правило, на значительные расстояния, на порядок или больше превышающие радиус планеты. Требуется вывести ротор за пределы орбит указанных препятствий или в некоторый свободный промежуток между ними, ограничиваясь движениями ротора внутри орбит крупных спутников.

Движение ротора с экваториальной плоскости недопустимо ввиду неизбежности столкновения с препятствиями. Остается движение вне этой плоскости. Но, как это будет показано ниже, такое движение является в общем случае колебательным по параметрам,



определяющим положение ротора, прежде всего по углу отклонения радиуса-вектора некоторой характерной точки ротора от плоскости экватора и радиусу самого ротора. Третий параметр, характеризующий движение ротора – угол собственного вращения, – также колебательный, но являясь циклической координатой, исключается из последующего рассмотрения с помощью соответствующего первого интеграла.

Таким образом, задача о маневрировании ротора ОТС может быть сформулирована следующим образом: выбор такого управления указанными двумя движениями ротора с помощью специального подбора некоторых его параметров, чтобы ротор, не столкнувшись ни с одним из препятствий, вышел на постоянную, заранее заданную орбиту в плоскости  $\Pi_1$ , погасив при этом колебания.

Гашение колебаний требует диссипации энергии; в данном случае в качестве диссипативной силы и, следовательно, основного управляющего параметра берется сила трения между фрагментами ротора при их телескопическом раздвижении.

Движение ротора определяется по отношению к поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре планеты; ось  $Z$  направлена вдоль оси вращения планеты и ротора, оси  $X$ ,  $Y$  – в плоскости  $\Pi_1$  экватора. Влияния Солнца, других планет, крупных спутников, а также препятствий, вблизи которых проходит ротор, не учитываются ввиду слабости их воздействий и малости времени движения.

Начальное состояние: ротор вращается с некоторой угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг оси  $Z$  в плоскости  $\Pi_0$ , параллельной  $\Pi_1$  и отстоящей от нее на расстоянии  $Z_0 = R \sin \psi_0$ , где  $R$  – экваториальный радиус планеты,  $\psi_0$  – начальное значение угла  $\psi$ , определяющего колебательное движение плоскости ротора относи-

тельно плоскости экватора (рис. I). Начальный радиус ротора  $R_0 = R \cos \psi_0$ , начальная линейная скорость  $V_0 = \omega_0 R_0 = \omega_0 R \cos \psi_0$ .

Принята следующая динамическая модель ротора: тонкое кольцо с однородными механическими свойствами, разделяющееся на фрагменты с телескопическим соединением. Когда заканчивается текущий этап разделения фрагментов, т.е. раздвигающиеся фрагменты выходят на упоры, сразу же начинается следующий этап, когда разделяется очередная группа фрагментов. Считается, что величину силы трения между фрагментами можно менять от нулевого до некоторого максимального значения за счет изменения нормального давления между фрикционными элементами, при этом изменение может быть как непрерывным, так и скачкообразным. Возможны два режима расширения ротора за счет телескопического раздвижения фрагментов: 1) силы трения между фрагментами отсутствуют; назовем такой режим свободным движением ротора; 2) силы трения между фрагментами отличны от нуля; такой режим будет называться фрикционным движением ротора.

В данном исследовании ставилось целью доказательство принципиальной возможности решения задачи о маневрировании при самых широких упрощающих предположениях относительно движения и свойств ротора. Дополнительно к сказанному отметим следующее.

1). Не обсуждаются вопросы о технической реализуемости проекта ОТС в конкретных условиях той или иной планеты: создания эстакады, сборки ротора, его запуска и т.д. То же самое и по отношению некоторых предположений об устройстве ротора, его возможных свойствах и др.

2). Чтобы излишне не усложнять решаемую задачу о маневрировании, не учитывается действие атмосферы.



3). Приводимые конкретные решения задачи о маневрировании в условиях Сатурна и Урана имеют скорее иллюстративный характер: не учитывая физических свойств планет и их атмосфер, мы берем только их системы колец и спутников в качестве вполне объективных примеров препятствий, которые может преодолеть ротор при выходе на заданную орбиту.

Исследуемые в работе вопросы: в рамках принятой модели ротора, других ограничений и предположений требуется определить

- 1) динамическую картину свободного движения ротора вне плоскости экватора;
- 2) общую методику выбора управляемого движения ротора, исходя из особенностей свободного движения, характера и количества препятствий, наличия свободных промежутков;
- 3) значения управляющего параметра - силы трения между фрагментами ротора - для совершения намеченного движения и выхода на орбиту;
- 4) в качестве примеров решить задачи о маневрировании в условиях Урана и Сатурна с их системами колец и спутников.

## 2. Дифференциальные уравнения движения ротора ОТС вне экваториальной плоскости

Схема движения ротора вне плоскости экватора и действующих в этом случае сил обозначена на рис.1 и 2. На рис.1 представлена картина движения точки  $M$  пересечения ротора с плоскостью  $XOZ$ . Отрезками  $K_1, K_2, \dots$  обозначены следы (выделены жирным) от пересечения с плоскостью  $XOZ$  таких препятствий, как кольца; звездочками  $C_1, C_2, \dots$  - точки пересечения с той же плоскостью орбит спутников. На рис.2 представлена картина движения

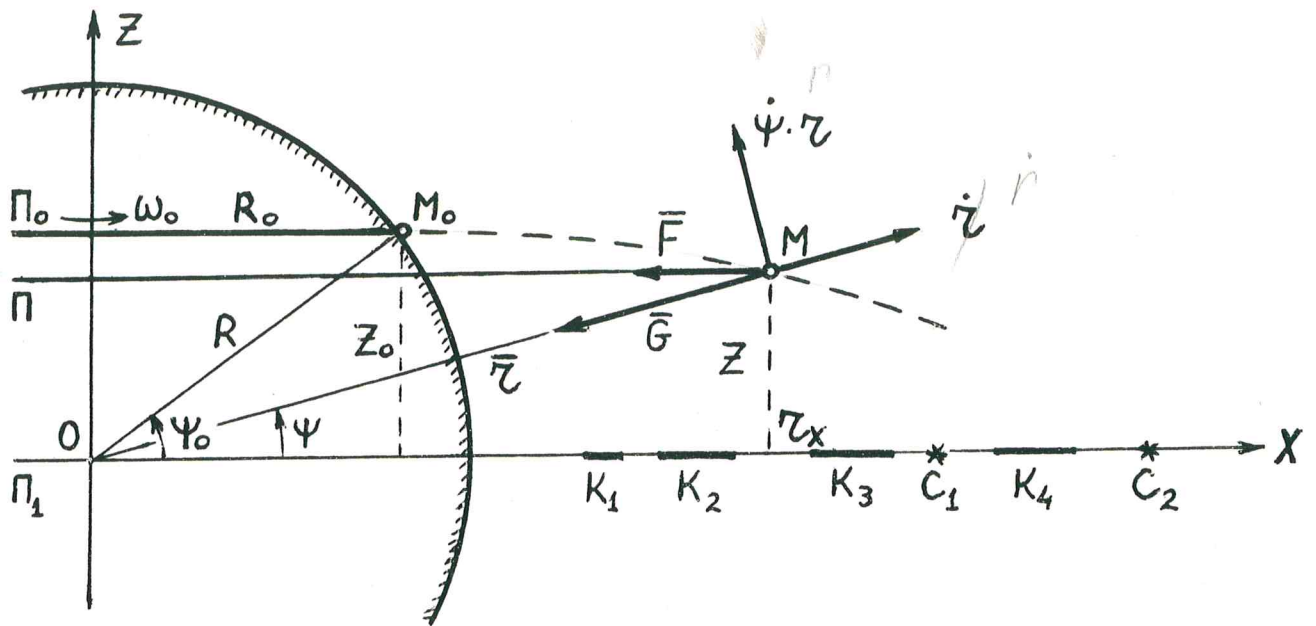


Рис.1. Схема движения точки  $M$  пересечения ротора с плоскостью  $XOZ$ .  $\Pi_0$  и  $\Pi$  - стартовая и текущая плоскости ротора;  $\Pi_1$  - плоскость экватора

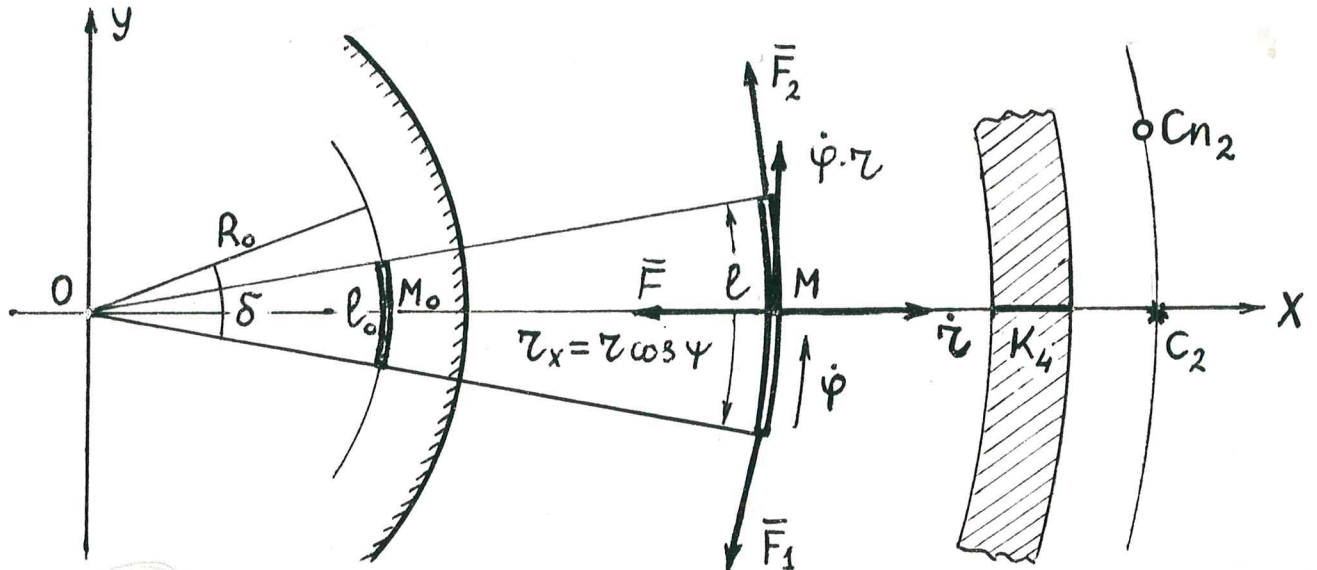


Рис.2. Схема движения элемента ротора в плоскости  $\Pi$ ; кольцо  $K_4$  и спутник  $C_{n_2}$  - в плоскости  $\Pi_1$ .

элемента  $l$  (см. ниже) в плоскости  $\Pi$  ротора; чтобы не загромождать чертеж, из предостережений здесь обозначены: фрагмент одного кольца ( $K_4$ ) и траектория одного спутника ( $C_{n_2}$ ), расположенные

в плоскости экватора  $\Pi_1$ .

Рассмотрим движение элемента ротора массы  $m$  и начальной длиной  $l_0 = l$  м. При движении ротора длина выделенного элемента увеличивается - за счет раздвижения фрагментов - пропорционально радиусу ротора, масса же его остается постоянной (в данном случае это будет некоторое усредненное по длине ротора значение массы элемента). Имеем, см. рис. I и 2:

$$l = l_0 \frac{r \cos \psi}{R \cos \psi_0}; \quad m = \text{const.} \quad (1)$$

В качестве обобщенных координат элемента берутся следующие три параметра: 1) угол  $\varphi$  поворота ротора в плоскости  $\Pi$ , где он расположен в данный момент времени; 2) расстояние  $r$  элемента до центра планеты; в дальнейшем будем рассматривать  $r$  как модуль радиуса-вектора  $\vec{r}$ , отмечающего положение центра масс элемента по отношению к инерциальной системе отсчета  $OXYZ$ ; 3) угол  $\psi$  отклонения  $\vec{r}$  от плоскости экватора  $\Pi_1$ .

Начальные значения этих параметров и их производных таковы:

$$\varphi_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = \omega_0; \quad r_0 = R, \quad \dot{r}_0 = 0; \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}_0 = 0. \quad (2)$$

Кинетическая энергия элемента имеет значение

$$T = \frac{m}{2} \left( \dot{\varphi}^2 r^2 \cos^2 \psi + \dot{r}^2 + \dot{\psi}^2 r^2 \right). \quad (3)$$

Силы, действующие на элемент.

1) Сила притяжения к центру планеты

$$G = mg \frac{R^2}{r^2}, \quad (4)$$

где  $g$  - ускорение силы тяжести на поверхности планеты.

2) Силы натяжения  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , возникающие от трения между фрагментами при их фрикционном раздвижении, действующие на концах элемента по касательным к ротору и имеющие равные величины:



$F_1 = F_2 = F_{\text{тр}}$  (рис.2). Их равнодействующая  $\bar{F}$  приложена в центре элемента в плоскости ротора  $\Pi$  и направлена по его радиусу к оси  $OZ$ ; ее модуль равен  $F = 2 F_{\text{тр}} \sin \frac{\delta}{2}$ , где  $\delta = \frac{l_0}{R_0} = \frac{l}{r \cos \psi}$ . Ввиду малости  $\delta$  можно записать ( $R_0 = R \cos \psi_0$ ):

$$F = F_{\text{тр}} \cdot \delta = \frac{F_{\text{тр}} \cdot l_0}{R \cos \psi_0}. \quad (5)$$

Считаем жесткость фрагментов ротора на растяжение достаточно большой, чтобы можно было пренебречь деформациями этих фрагментов.

Обозначив через  $\delta\varphi$ ,  $\delta z$  и  $\delta\psi$  вариации обобщенных координат, находим сумму работ сил (4) и (5):

$$\sum \delta A = -G \delta z - F \cos \psi \cdot \delta z + F \sin \psi \cdot z \cdot \delta \psi,$$

откуда определяем обобщенные силы системы:

$$Q_\varphi = 0; \quad Q_z = -G - F \cos \psi; \quad Q_\psi = F \cdot z \cdot \sin \psi. \quad (6)$$

Используя формализм Лагранжа, получаем дифференциальные уравнения движения элемента ротора вне плоскости экватора:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \ddot{\varphi} z \cos \psi + 2 \dot{\varphi} \dot{z} \cos \psi - 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} z \sin \psi = 0; \\ 2) \quad & \ddot{z} = \dot{\varphi}^2 z \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2 z - g \frac{R^2}{z^2} - \frac{F}{m} \cos \psi; \\ 3) \quad & \ddot{\psi} + 2 \dot{\psi} \frac{\dot{z}}{z} + \dot{\varphi}^2 \sin \psi \cos \psi - \frac{F}{m} \frac{\sin \psi}{z} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Координата  $\varphi$  является циклической; соответствующий первый интеграл имеет смысл закона сохранения кинетического момента ротора относительно оси  $OZ$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0 R^2 \cos^2 \psi_0}{z^2 \cos^2 \psi} = \frac{V_0 R \cos \psi_0}{z^2 \cos^2 \psi}, \quad (8)$$

где  $V_0 = \dot{\varphi}_0 R_0 = \omega_0 R \cos \psi_0$  - стартовая линейная скорость ротора.



Переходя к безразмерной координате  $x = \frac{r}{R}$ , используя обозначения

$$q = \frac{g}{R}; \quad \beta = \frac{V_0^2 \cos^2 \psi_0}{gR}; \quad f = \frac{F}{m \cdot R} = \frac{F_{\text{тр}} \cdot l_0}{m \cdot R^2 \cdot \cos \psi_0}, \quad (9)$$

получаем с учетом интеграла (8):

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{\psi} &= \sqrt{q\beta} / (x^2 \cos^2 \psi); \\ 2) \quad \ddot{x} &= q \left( \frac{\beta}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \psi} - \frac{1}{x^2} \right) + \dot{\psi}^2 \cdot x - f \cos \psi; \\ 3) \quad \ddot{\psi} + 2\dot{\psi} \frac{\dot{x}}{x} + \frac{q\beta \sin \psi}{x^4 \cos^3 \psi} - f \frac{\sin \psi}{x} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Условие начала радиального движения может быть получено из уравнения 2) с помощью начальных условий (2), условия  $x_0 = 1$  и зависимостей (9):

$$\ddot{x}_0 = q \left( \frac{\beta}{\cos^2 \psi_0} - 1 \right) - f^0 \cos \psi_0 = \frac{V_0^2}{R^2} - \frac{g}{R} - \frac{F_{\text{тр}}^0 \cdot l_0}{m \cdot R^2} \geq 0. \quad (11)$$

Отсюда получаем:

$$V_0^2 \geq gR + \frac{F_{\text{тр}}^0 \cdot l_0}{m}, \quad (12)$$

- условие на величину стартовой скорости  $V_0$  для начала радиального движения. Имеем: 1) минимальное значение  $V_0$ , определяемое только гравитацией планеты, достигается при отсутствии трения:  $F_{\text{тр}}^0 = 0$ ; 2) наличие трения между фрагментами увеличивает значение  $V_0$ .

Из уравнения 3) аналогично получаем начальное значение углового ускорения  $\ddot{\psi}_0$ :

$$\ddot{\psi}_0 = - \left( V_0^2 - \frac{F_{\text{тр}}^0 \cdot l_0}{m} \right) \frac{\tan \psi_0}{R^2} < 0, \quad (13)$$

т.е. плоскость ротора из начального положения  $\Pi_0$  начинает движение к плоскости экватора  $\Pi_1$ , при этом трение замедляет такое

движение.

Как уже говорилось, считается, что сила трения  $F_{тр}$  зависит от положения ротора; для решения задачи о маневрировании достаточно считать ее функцией только координаты  $X$ , поскольку положение препятствий и свободных промежутков между ними полностью определяется с помощью  $X$ :

$$F_{тр} = F_{тр}(x) \quad \text{или} \quad f = f(x). \quad (I4)$$

Ниже приводится более точная формулировка задачи о маневрировании ротора.

Определить значение стартовой скорости  $V_0$  и зависимость (I4) для параметра  $f$  таким образом, чтобы:

- 1) ротор, не столкнувшись ни с одним препятствием, вышел в плоскости  $\Pi_1$  на орбиту, определяемую задаваемой координатой  $X_*$ ;
- 2) положение орбиты  $X_*$  определяется из условия отсутствия каких-либо препятствий в некоторой ее окрестности;
- 3) угловое движение по параметру  $\psi$  и радиальное движение по параметру  $X$  должны быть погашены в положении  $X_*$ :

$$\psi(x_*) = \dot{\psi}(x_*) = \ddot{\psi}(x_*) = 0; \quad \dot{X}(x_*) = \ddot{X}(x_*) = 0. \quad (I5)$$

### 3. Методика решения задачи о маневрировании путем перехода к новой независимой переменной

Решение поставленной задачи достигается с помощью уравнений 2, 3 системы (I0), представляющих собой нелинейную, довольно сложную систему дифференциальных уравнений относительно координат  $X$ ,  $\psi$ , содержащую неизвестный пока параметр управления  $f(x)$ . Для определения управления  $f(x)$  мы имеем только условия (I5), т.е. задача оказывается двухточечной, с краевыми усло-

виями в начальном и конечном положениях, содержащими к тому же значения вторых производных.

Сложность задачи заключается и в том, что решение системы (10) может быть записано только в форме зависимостей от времени  $t$ :  $x = x(t)$ ,  $\psi = \psi(t)$ . Но для формирования управления, преследующего цель обхода препятствий, положение которых определяется конкретными значениями параметра  $X$ , зависимость координаты  $X$  ротора от  $t$  должна быть известна в ходе решения задачи, т.е. круг замыкается: чтобы найти с помощью соотношений (10) зависимости  $x(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $f(x)$ , нужно заранее знать  $x(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $t(x)$ . Попытки найти решение путем подбора управления  $f(x)$  ни к чему не привели, но оказались полезными в смысле прояснения некоторых особенностей исследуемого движения и на основе этого определения общей методики решения поставленной задачи. Решение при этом достигается в аналитической форме.

Предлагаемая методика заключается в следующем.

- A. Линеаризация уравнений (10) по параметру  $\psi$ .
- B. Переход к новой независимой переменной, в качестве которой берется координата  $X$ .
- C. Определение динамики свободного движения ротора, т.е. без учета сил трения между фрагментами.
- D. Определение управляющего параметра с целью коррекции свободного движения, обеспечивающей необходимый маневр ротора.
- E. Разделение этапов гашения двух движений ротора: сначала погашается движение по углу  $\psi$ , затем — радиальное движение по координате  $X$ .

Ограничимся решением задачи с достаточно малым значением начального угла  $\psi_0$ ; поскольку в дальнейшем, как это будет показано, модуль  $\psi$  уменьшается, нигде не превышая  $\psi_0$ , то можно



сделать соответствующую оценку приближений

$$\sin \psi = \psi ; \quad \cos \psi = 1, \quad (16)$$

пренебрегая более высокими степенями  $\psi$  и  $\dot{\psi}$ .

Уравнения 2 и 3 системы (10) принимают вид:

$$\ddot{X} = q \left( \frac{\beta}{X^3} - \frac{1}{X^2} \right) - f(x); \quad (17, a)$$

$$\ddot{\psi} + 2\dot{\psi} \frac{\dot{X}}{X} + \left( \frac{q\beta}{X^4} - \frac{f(x)}{X} \right) \psi = 0. \quad (17, б)$$

Как видим, первое уравнение отделяется, содержа только переменную  $X$  и ее вторую производную. Интегрируя его с пределами от  $X_0 = 1$  до  $X > X_0$ , получим

$$\dot{X}^2 = q(X-1) \left( \beta \frac{X+1}{X^2} - \frac{2}{X} \right) - 2 \int_{X_0}^X f(x) dx. \quad (18)$$

Уравнения (17, а) и (18) дают зависимость радиального ускорения  $\ddot{X}$  и радиальной скорости  $\dot{X}$  от положения  $X$  ротора и управления  $f(x)$ , что является определяющим в решении поставленной задачи и, в частности, при гашении радиального движения в конечном положении  $X_*$ .

К нахождению зависимости  $\psi = \psi(x)$  можно перейти следующим приемом. Будем считать  $\psi$  сложной функцией  $t$ :  $\psi = \psi(x(t))$ . Тогда имеем:

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \psi' \cdot \dot{X}; \quad (19)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\psi' \cdot \dot{X}) = \frac{d\psi'}{dx} \cdot \dot{X}^2 + \psi' \cdot \frac{d\dot{X}}{dt} = \psi'' \cdot \dot{X}^2 + \psi' \cdot \ddot{X}, \quad (20)$$

где штрихами обозначены производные  $\psi$  по  $X$ , а точками, как и раньше, производные  $X$  и  $\psi$  по  $t$ .

Подставляя (19), (20) в уравнение (17, б), получаем:

$$\Psi'' \cdot \dot{x}^2 + \Psi' \left( \ddot{x} + 2 \frac{\dot{x}^2}{x} \right) + \left( \frac{q\beta}{x^4} - \frac{f(x)}{x} \right) \cdot \Psi = 0, \quad (21)$$

или, с учетом зависимостей (17,а) и (18):

$$\begin{aligned} \Psi'' \cdot \left[ q(x-1) \left( \beta \frac{x+1}{x^2} - \frac{2}{x} \right) - 2 \int_{x_0}^x f(x) dx \right] + \Psi' \cdot \left[ q \left( \frac{\beta}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) - f(x) + \right. \\ \left. + 2q \frac{x-1}{x} \left( \beta \frac{x+1}{x^2} - \frac{2}{x} \right) - \frac{4}{x} \int_{x_0}^x f(x) dx \right] + \Psi \cdot \left[ \frac{q\beta}{x^4} - \frac{f(x)}{x} \right] = 0. \quad (22) \end{aligned}$$

Полученное выражение можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно  $\Psi(x)$  с переменными коэффициентами, содержащими управляющий параметр  $f(x)$ . Тем самым можно считать завершенным переход к новой независимой переменной  $x$ , поскольку время  $t$  оказалось исключенным.

#### 4. Динамика свободного движения ротора

Рассмотрим вначале характеристики движения при свободном телескопическом, но без сил трения между фрагментами - движении ротора. В этом случае уравнения (17,а), (17,б) и (22) принимают вид:

$$\ddot{x} = q \left( \frac{\beta}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right); \quad \dot{x}^2 = q(x-1) \left( \beta \frac{x+1}{x^2} - \frac{2}{x} \right); \quad (23)$$

$$\Psi'' \left[ (\beta-2)x^4 + 2x^3 - \beta x^2 \right] + \Psi' \left[ 2(\beta-2)x^3 + 3x^2 - \beta x \right] + \Psi \cdot \beta = 0; \quad (24)$$

в последнем уравнении сделаны: сокращение общего множителя  $q$ , приведение к общему знаменателю  $1/x^4$  и некоторые простые преобразования. Для определения зависимости  $\Psi = \Psi(x)$  получаем, таким образом, линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, представляющими собой полиномы по  $x$ . В этом случае, как известно [1], с.165, частное решение  $\Psi_1(x)$  ищется также в виде полинома:

$$\Psi_1(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (25)$$

степень  $n$  которого определяется путем подстановки (25) в (24) и приравнивания нулю коэффициента при старшей степени:

$$(\beta - 2) \cdot n \cdot (n-1) x^{n+2} + 2(\beta - 2) \cdot n \cdot x^{n+2} = 0.$$

Имеем, в случае нетривиального решения,  $n = -1$ , т.е.

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{x} + a. \quad (26)$$

Величина  $a$  определяется путем взятия от (26) первой и второй производных по  $x$  и подстановки в исходное уравнение (24):

$$2(\beta - 2)x + 4 - 2 \frac{\beta}{x} - 2(\beta - 2)x - 3 + \frac{\beta}{x} + \frac{\beta}{x} + \beta a = 0,$$

откуда, после упрощений, получаем  $1 + \beta a = 0$  и  $a = -\frac{1}{\beta}$ .

Тогда первое частное решение уравнения (24) имеет вид:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - x}{\beta x}. \quad (27)$$

Второе частное решение может быть определено через первое [I], с.165:

$$\Psi_2(x) = \Psi_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{\Psi_1^2(x)} dx, \quad (28)$$

где  $p(x) dx = \frac{2(\beta - 2)x^3 + 3x^2 - \beta x}{(\beta - 2)x^4 + 2x^3 - \beta x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{du}{u}$ , если знаменатель дроби обозначить через  $u(x)$ . Тогда  $\int p(x) dx = \frac{1}{2} \ln u = \ln u^{\frac{1}{2}}$ ;  $e^{-\ln u^{0,5}} = e^{\ln u^{-0,5}} = u^{-0,5}$  и для  $\Psi_2$  получаем:

$$\Psi_2(x) = \Psi_1(x) \int \frac{\beta^2 \cdot x^2 dx}{(\beta - x)^2 [(\beta - 2)x^4 + 2x^3 - \beta x^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (29)$$

Сделав последовательно замены:

$$\frac{1}{\beta - x} = z; \quad \beta z - 1 = y; \quad y^2 = s, \quad (30)$$



сводим интеграл в (29) к табличному интегралу:

$$\Psi_2 = \Psi_1 \cdot \frac{\kappa}{2} \int \frac{dS}{\sqrt{S-b}} = \Psi_1 \cdot \kappa \cdot \sqrt{S-b}, \quad (31)$$

где  $\kappa = \beta^{\frac{3}{2}} / \sqrt{\beta(\beta-2)+1}$ ,  $b = 1 / \beta(\beta-2)+1$ .

Проделив замены (30) в обратном порядке, находим второе частное решение:

$$\Psi_2(x) = \Psi_1(x) \frac{\beta^2}{\beta-x} \sqrt{(x-1)[(\beta-2)x+\beta]} = \frac{\beta}{x} \sqrt{(x-1)[(\beta-2)x+\beta]}. \quad (32)$$

Общее решение уравнения (24) равно линейной комбинации частных решений с неопределенными константами:

$$\Psi(x) = e_1 \cdot \Psi_1(x) + e_2 \cdot \Psi_2(x); \quad (33)$$

последние определяются, как всегда, из начальных условий.

Согласно начальным условиям (2), имеем в момент  $t = 0$ , когда  $X = X_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= \Psi(x_0) = \Psi_0; \\ \dot{\Psi}(0) &= \Psi'(x_0) \cdot \dot{X}(x_0) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя в (33) выражения (27) и (32), и взяв затем производную по параметру  $x$ , получаем соответственно:

$$\Psi(x) = e_1 \frac{\beta-x}{\beta x} + e_2 \frac{\beta}{x} \sqrt{(x-1)[(\beta-2)x+\beta]}; \quad (35)$$

$$\Psi'(x) = -\frac{e_1}{x^2} - \frac{e_2 \beta}{x^2} \sqrt{(x-1)[(\beta-2)x+\beta]} + \frac{e_2 \beta}{x} \cdot \frac{2[(\beta-2)x+1]}{\sqrt{(x-1)[(\beta-2)x+\beta]}}. \quad (36)$$

Производная  $\Psi'(x)$  имеет интегрируемую особенность в самом начале движения, т.е. при  $X = X_0 = 1$ . Она возникает, очевидно, оттого, что коэффициент при старшей производной в уравнении (24) обращается в нуль в той же точке. Как будет следовать из ниже изложенного, эта особенность исчезает в выражении  $\dot{\Psi}(0) = \Psi'(x_0) \cdot \dot{X}(x_0)$  при умножении на значение  $\dot{X}(x)$  и переходе к

пределу.

Выражение  $\dot{X}(x)$  можно получить из второго соотношения (23):

$$\dot{X}(x) = \frac{\sqrt{q}}{x} \sqrt{(x-1)[(\beta-2)x + \beta]}, \quad (37)$$

и при значении  $X_0 = 1$   $\dot{X}(X_0) = 0$ , что согласуется с условиями (2), поскольку  $\dot{X} = \dot{z}/R$ , а  $\dot{z}_0 = \dot{z}(X_0) = 0$ .

Подставляя (35), (36), (37) в начальные условия (34), получаем:

$$e_1 \cdot \frac{\beta-1}{\beta} = \psi_0; \quad e_2 \cdot 2\beta(\beta-1) = 0. \quad (38)$$

Параметр  $\beta$ , определяющий положение  $X_*$  задаваемой орбиты ротора (см. ниже), не равен 1, точнее  $\beta = X_* > 1$ . Тогда из (38) получаем:

$$e_1 = \psi_0 \frac{\beta}{\beta-1}; \quad e_2 = 0, \quad (39)$$

и искомое решение уравнения (24), т.е. зависимость  $\psi = \psi(x)$ , удовлетворяющая начальным условиям (34), принимает вид:

$$\psi(x) = \frac{\psi_0}{\beta-1} \cdot \frac{\beta-x}{x}, \quad x \geq 1. \quad (40)$$

Таким образом, угол  $\psi$ , определяющий движение плоскости ротора  $\Pi$  по отношению к плоскости экватора  $\Pi_1$ , меняется в зависимости от безразмерной радиальной координаты  $X$  согласно найденному, сравнительно простому выражению (40). Подчеркиваем, что эта зависимость имеет место в случае свободного движения ротора, т.е. без сил трения между фрагментами. Анализ движения ротора согласно (23) и (40) приводится ниже; предварительно разберем вопрос о соотношении времени движения с положением ротора.

Соотношение (37) позволяет найти явную зависимость времени движения от положения  $X$  ротора. Имеем:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{q}}{x} \sqrt{(x-1)[(\beta-2)x + \beta]} .$$

Разделяем переменные и интегрируем в пределах от  $X_0$  до  $X$  :

$$t = \frac{1}{\sqrt{q}} \int_{X_0}^X \frac{x dx}{\sqrt{(\beta-2)x^2 + 2x - \beta}} .$$

Интегрирование согласно [2], формулы 2.264.2, 2.26I и 2.222.2, приводит к результатам, зависящим от значения  $\beta$  :

1) если  $\beta < 2$  , то

$$t = \frac{1}{\sqrt{q}(2-\beta)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2-\beta}} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1-(2-\beta)x}{\beta-1} \right] - \sqrt{2x-\beta-(2-\beta)x^2} \right\} ; \quad (41)$$

2) если  $\beta > 2$  , то

$$t = \frac{1}{\sqrt{q}(\beta-2)} \left\{ \sqrt{(\beta-2)x^2 + 2x - \beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta-2}} \ln \frac{\sqrt{(\beta-2)[(\beta-2)x^2 + 2x - \beta]} + (\beta-2)x + 1}{\beta-1} \right\} ; \quad (42)$$

3) если  $\beta = 2$  , то

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{q}} (x+2) \sqrt{x-1} . \quad (43)$$

Таким образом, динамика свободного движения ротора вне экваториальной плоскости описывается соотношениями (23), (37), (40), (19), (20); связь со временем - соотношениями (41)-(43). Анализ этих соотношений приводит к следующим результатам.

I. Ускорение радиального движения  $\ddot{X}$  , согласно (23), обращается в нуль в единственной точке:  $X = \beta$  . Если  $X < \beta$  , то  $\ddot{X} > 0$  и ротор будет стремиться к расширению; если  $X > \beta$  , то  $\ddot{X} < 0$  , ротор стремится к сужению. На постоянной орбите фрагменты ротора, соединяясь телескопически, не должны испытывать никаких напряжений, в том числе от сил трения, т.е. свободны в смысле, определенном в п.I. Следовательно, постоянная (устойчивая) орбита, где отсутствует радиальное движение ротора, может быть только в положении  $X_*$  , определяемом из условия



$$X_* = \beta. \quad (44)$$

Итак, параметр  $\beta$  определяет положение устойчивой орбиты ротора, представляющего собой свободное телескопическое соединение фрагментов. Используя выражение  $\beta$  из второго соотношения (9), получаем:

$$V_0 = \frac{1}{\omega_0 \psi_0} \sqrt{\beta g R} = \frac{1}{\omega_0 \psi_0} \sqrt{X_* g R}, \quad (45)$$

- величина стартовой скорости ротора, необходимая для достижения заданной орбиты  $X_* = z_*/R$ ,  $z_*$  - радиус орбиты. Положение орбиты и, следовательно, величину  $V_0$  следует выбирать, во-первых, из целей, поставленных перед данным запуском ротора ОТС и, во-вторых, из условия отсутствия в точке  $X_*$ , а также в некоторой ее окрестности, каких-либо препятствий.

Отсюда можно сделать вывод: величина стартовой скорости ротора является параметром, с помощью которого можно управлять как движением ротора, так и его конечным положением на орбите. Действительно, величина  $\beta$ , связанная с  $V_0$ , входит во все соотношения, описывающие динамику ротора. Но в силу постоянства этого параметра его использование в целях управления движением - ограничено. Наиболее ценно то, что его можно использовать для произвольного задания орбиты ротора.

II. Скорость радиального движения  $\dot{X}$ , определяемая согласно (37), имеет более сложное поведение. Поскольку на постоянной орбите эта скорость должна отсутствовать, мы обратим внимание на условия, когда  $\dot{X} = 0$ .

I) Прежде всего, радиальная скорость обращается в нуль - за счет первого множителя подкоренного выражения (37) - в точке  $X = X_0 = 1$ , т.е. в начале радиального движения, что согласует-

ся с начальными условиями (2).

2) Обращение ее в нуль в точке  $X_* = \beta$  - за счет второго множителя - приводит к следующему результату:  $(\beta - 2)\beta + \beta = \beta(\beta - 1) = 0$ ; исключая тривиальный случай  $\beta = 0$ , получаем:  $\beta = 1 = X_0$  и, следовательно, орбита в этом случае находится в исходном положении ротора. Точнее - ротор станет сползать по поверхности планеты в сторону экватора. Значение  $V_1 = \frac{1}{\cos \psi_0} \sqrt{gR} \approx \sqrt{gR}$  (для малого  $\psi_0$ ) является, очевидно, первой космической скоростью ротора, достаточной только для уравнивания силы тяжести на поверхности планеты. (Для Земли, полагая  $g = 9,814 \text{ м/с}^2$  и  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ , получаем известное значение  $V_1 = 7,9 \text{ км/с}$ .) Исключая этот вариант, т.е. считая  $\beta > 1$ , получаем, что в таком случае радиальная скорость в положении  $X_* = \beta$  отлична от нуля:

$$\dot{X}(X_*) = \frac{\sqrt{g}}{\beta} \sqrt{(\beta - 1)[(\beta - 2)\beta + \beta]} = \sqrt{\frac{g}{\beta}} (\beta - 1). \quad (46)$$

Таким образом, в свободном движении ротор проходит положение орбиты  $X_* = \beta > 1$  с отличной от нуля радиальной скоростью.

Картина дальнейшего его движения зависит от соотношения величины  $\beta$  по отношению к значению

$$\beta_{кр} = 2, \quad (47)$$

называемому в дальнейшем критическим значением параметра  $\beta$ .

3) Если  $1 < \beta < \beta_{кр}$ , то радиальная скорость  $\dot{X}$  обращается в нуль в точке  $X_{**}$ , определяемой с помощью второго множителя подкоренного выражения (37):

$$X_{**} = -\frac{\beta}{\beta - 2} = \frac{\beta}{2 - \beta}. \quad (48)$$

Точка  $X_{**}$  лежит дальше (в направлении от центра планеты)



точки  $X_*$ , поскольку в интервале  $1 < \beta < 2$  дробь  $\frac{\beta}{2-\beta} > \beta$ .  
 Имея в точке  $X_{**} > X_* = \beta$  отрицательное радиальное ускорение  $\ddot{X} < 0$  и нулевую радиальную скорость  $\dot{X} = 0$ , ротор в дальнейшем начнет движение в обратном направлении, пройдет положение  $X_* = \beta$  с отличной от нуля радиальной скоростью, после чего знак  $\ddot{X}$  изменится, движение станет замедленным и ротор остановится в положении  $X = X_0 = 1$ . Затем он повторит движение в прямом направлении; таким образом, его движение по параметру  $X$  в исследуемом случае свободного движения ротора является колебательным в интервале  $[X_0, X_{**}]$  с "центром" колебаний  $X_*$ .

Зависимость времени движения от положения определяется соотношением (41); отсюда же определяется значение полупериода колебаний:

$$\frac{1}{2} T = \frac{1}{\sqrt{q}(2-\beta)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-\beta}} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1-\beta}{\beta-1} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{q(2-\beta)^3}} \quad (49)$$

4) Если  $\beta = \beta_{кр} = 2$ , то согласно (37) или (48), не существует конечного значения  $X > 1$ , где радиальная скорость  $\dot{X}$  обращается в нуль. Следовательно, ротор в этом случае удаляется на бесконечно большое расстояние, если не касаться технических вопросов о реализуемости такого движения. Скорость  $V_2 = \frac{1}{\cos \psi_0} \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2gR}$  является, очевидно, второй космической скоростью ротора (для Земли имеем  $V_2 = 11,2$  км/с). Зависимость времени движения от положения определяется соотношением (43).

Таким образом, в свободном движении, в случае  $\beta = \beta_{кр}$ , ротор ОТС после прохождения положения  $X_* = \beta$ , где  $\ddot{X} = 0$  и затем меняет знак, нигде более не останавливается, удаляясь на бесконечность. При этом скорость радиального движения  $\dot{X}$ , согласно (37), уменьшается, принимая в пределе, при  $X \rightarrow \infty$ , нулевое значение.



Этот факт имеет, очевидно, принципиальное значение, поскольку, в общем, накладывает существенные ограничения на выбор размеров орбит.

5) В случае  $\beta > \beta_{кр}$  имеем  $V_0 > V_2$ ; здесь имеет место та же ситуация, что и в предыдущем пункте: ротор в своем свободном движении удаляется на бесконечность, но в этом случае скорость на бесконечности имеет значение, отличное от нуля:

$\dot{X}_\infty = \sqrt{q(\beta-2)}$ . Зависимость времени движения от положения определяется соотношением (42).

Введение сил трения между фрагментами, как это будет показано ниже, изменяет картину движения ротора. А именно, колебательное движение может стать затухающим или вообще неколебательным. Описанные в п.п. 4, 5 движения также изменяются в том, что касается величины  $\beta_{кр}$  — она в этом случае может быть увеличена, что приводит к увеличению размеров возможных постоянных орбит ротора.

Подбирая специальным образом значение сил трения, можно достичь обращения в нуль в положении  $X_* = \beta$  как ускорения  $\ddot{X}$ , так и скорости  $\dot{X}$ , обеспечивая тем самым выход ротора на заданную постоянную орбиту.

III. Обратимся теперь к исследованию движения по углу  $\psi$ , описываемого соотношениями (40), (19) и (20). При колебательном режиме движения по параметру  $X$ , т.е. для  $\beta < \beta_{кр} = 2$ , в пределах от  $X_0 = 1$  до  $X_{**} = \frac{\beta}{2-\beta}$ , угол  $\psi$  меняется, согласно (40), в пределах от  $\psi_0$  до  $\psi_{**} = \frac{\psi_0}{\beta-1} \left[ \beta - \frac{\beta}{2-\beta} \right] / \frac{\beta}{2-\beta} = -\psi_0$ , в полном согласии с канонами колебательного движения. Угловая скорость  $\dot{\psi} = \psi' \cdot \dot{X}$  меняется при этом от  $\dot{\psi}_0 = 0$  до  $\dot{\psi}_{**} = 0$ , что следует из того, что  $\dot{X}(X_0) = \dot{X}(X_{**}) = 0$ . Наибольшее (по модулю) значение достигается в положении  $X_* = \beta$ :

$$\dot{\Psi}_* = - \frac{\Psi_0 \beta \sqrt{q}}{(\beta-1) \beta^3} \sqrt{(\beta-1)^2 \beta} = - \Psi_0 \sqrt{\frac{q}{\beta^3}}.$$

Угловое ускорение  $\ddot{\Psi} = \Psi'' \dot{X}^2 + \Psi' \ddot{X}$ , после подстановки производных  $\Psi''(x)$ ,  $\Psi'(x)$  получает выражение:

$$\ddot{\Psi}(x) = \frac{\Psi_0 \beta}{\beta-1} \cdot \frac{1}{x^2} \left[ \frac{2\dot{X}^2}{x} - \ddot{X} \right]; \quad (50)$$

в точках  $X_0 = 1$ ,  $X_* = \beta$  и  $X_{**} = \frac{\beta}{2-\beta}$  оно имеет значения:

$$\ddot{\Psi}(x_0) = -\Psi_0 \beta q; \quad \ddot{\Psi}(x_*) = 2\Psi_0 q (\beta-1)^2 / \beta^4; \quad \ddot{\Psi}(x_{**}) = \Psi_0 q (2-\beta)^4 / \beta^3, \quad (51)$$

обращаясь в нуль в точке

$$x' = \frac{3 - \sqrt{9 + 8\beta^2 - 16\beta}}{2(2-\beta)}, \quad (52)$$

что вытекает из равенства нулю квадратной скобки в соотношении (50), где  $\ddot{X}$  и  $\dot{X}^2$  определяются согласно (23). Не трудно убедиться, что точка  $x'$  расположена левее точки орбиты  $x_*$ . Например, для  $\beta = 1,5$  имеем:  $x' = 3 - \sqrt{3} = 1,27 < 1,5 = x_*$ .

IV. Для бóльшей наглядности картины свободного движения ротора вне плоскости экватора введем величину

$$z = x \cdot R \cdot \sin \psi, \quad (53)$$

представляющую собой натуральное значение высоты ротора над плоскостью экватора. Ограничиваясь малым значением  $\psi_0$ , имея ввиду, что в дальнейшем движении модуль  $\psi$  не превышает  $\psi_0$  и линеаризируя (53) по  $\psi$ , получаем с учетом (40):

$$z = x \cdot \psi \cdot R = \frac{\psi_0}{\beta-1} \cdot (\beta-x) \cdot R. \quad (54)$$

Величина  $z$  (рис.1, 2) представляет собой аппликату точки  $M$  пересечения ротора с плоскостью  $XOZ$ , а уравнение (54) - уравнение траектории этой точки. Как видим, эта траектория, в предположении малости угла  $\psi$ , представляет собой прямую с началом



в точке  $M_0$ , пересекающую ось  $X$  (плоскость экватора) в единственной точке  $X_* = \beta$ , т.е. в точке, где может проходить постоянная орбита ротора (рис.3). В свободном движении ротора значения  $\dot{X}$ ,  $\dot{\Psi}$  и  $\ddot{\Psi}$  в точке  $X_*$  не равны нулю, следовательно, точка  $M$  проходит положение  $X_*$ , не останавливаясь. При колебательном режиме движения, когда  $\beta < \beta_{кр} = 2$ , точка  $M$  движется до положения  $M_{**}$  с координатой  $X_{**}$ , определяемой с помощью (48), после чего начинает обратное движение по отрезку прямой  $M_{**} M_0$ .

При движении в критическом режиме  $\beta \geq \beta_{кр}$  точка  $M$  (и ротор) удаляются вдоль прямой  $M_0 M_{**}$  на бесконечность.

### 5. Динамика управляемого движения ротора

Тот факт, что траектория точки  $M$  пересекает ось  $X$  (плоскость экватора) в единственной точке и она является ни чем иным, как точкой  $X_* = \beta$ , через которую проходит постоянная орбита, имеет принципиальное значение для решения задачи о маневрировании: обеспечение выхода ротора на эту орбиту без столкновения с препятствиями и с выполнением условий (15). А именно, имея схему расположения препятствий, можно, путем задания положения  $X_*$ , обеспечить условия обхода ротором этих препятствий (или хотя бы части их). Другая часть задачи – гашение колебаний – может быть обеспечена путем фрикционного торможения фрагментов ротора.

Введение сил трения дает следующие возможности.

1) Значение  $\beta_{кр}$  изменяется в сторону увеличения; следовательно, диапазон докритических режимов движения ротора расширяется за пределы  $\beta = 2$ .

2) Последнее обстоятельство увеличивает вероятность выбора такого положения орбиты  $X_* = \beta$ , чтобы в некоторой ее окрестности не проходили орбиты каких-либо препятствий (см. рис.3, где



точка  $X_*$  находится примерно посередине между орбитами двух естественных спутников).

3) Погасить колебательные движения ротора можно отдельно по параметрам  $\Psi$  и  $X$ .

Последнее предлагается сделать следующим образом. Процесс выхода ротора на орбиту делится на три этапа; положение ротора на каждом этапе определяется с помощью параметров  $X$  и  $\Psi$ , из которых  $X$ , как и раньше, берется в качестве независимого аргумента.

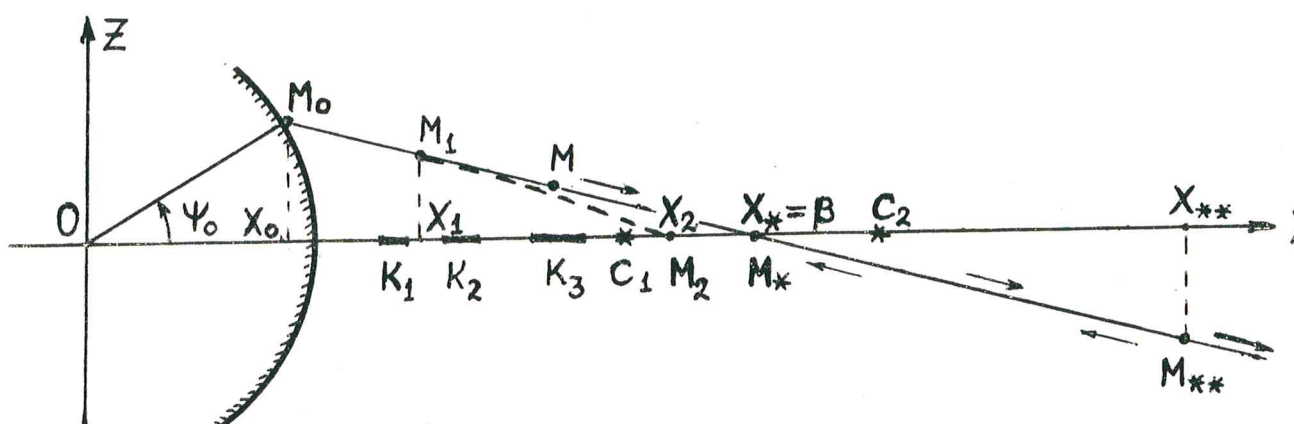


Рис.3. Схема свободного (сплошная линия  $M_0 M_* M_{**} \dots$ ) и управляемого (штриховая линия  $M_1 M_2$  и далее  $M_2 M_*$ ) движения ротора при обходе препятствий.

1) Первый этап - от начального положения  $X_0$  до некоторого положения  $X_1$  - свободное радиальное движение ротора. Здесь он набирает радиальную скорость, двигаясь по прямолинейному участку  $M_0 M_1$ ; положение  $X_1$  будет определено ниже.

2) Второй этап - движение ротора между положениями  $X_1$  и  $X_2 < X_*$  - с учетом действия сил трения между фрагментами. На этом этапе осуществляется гашение движения по углу  $\Psi$  с выполнением условий

$$\Psi(X_2) = \dot{\Psi}(X_2) = \ddot{\Psi}(X_2) = 0, \quad (55)$$

и частичное гашение движения по координате  $X$ . Точка  $X_2$  выбирается заранее в той свободной от препятствий окрестности вокруг точки орбиты  $X_*$ , о которой говорилось выше. Движение точки  $M$  происходит здесь по некоторой криволинейной траектории  $M_1M_2$ , предположительная форма которой обозначена на рис.3 штрихами. Дальнейшее движение точки  $M$  возможно только по оси  $X$ , что соответствует движению ротора в плоскости экватора.

3) Третий, заключительный этап - фрикционное (т.е. с учетом трения) движение ротора в плоскости экватора от положения  $X_2$  до орбиты  $X_*$ ; здесь происходит окончательное гашение движения по координате  $X$  с выполнением условий

$$\dot{X}(X_*) = \ddot{X}(X_*) = 0. \quad (56)$$

Движение на первом этапе описывается соотношениями (23) по координате  $X$  и соотношениями (19), (20) и (40) по углу  $\Psi$ . Для "склеивания" результатов первого и второго этапов, в том что касается угла  $\Psi$ , отметим значения  $\Psi$  и  $\Psi' = \frac{d\Psi}{dx}$  в конце первого этапа:

$$\Psi(x_1) = \frac{\Psi_0}{\beta-1} \cdot \frac{\beta-x_1}{x_1}; \quad \Psi'(x) = -\frac{\Psi_0}{\beta-1} \cdot \frac{\beta}{x_1^2}. \quad (57)$$

На втором этапе, с учетом сил трения между фрагментами, движение ротора описывается с помощью уравнений (17,а), (18) для координаты  $X$  и (21) для угла  $\Psi$ . Здесь  $f(x)$ , связанная с силой трения  $F_{тр}(x)$  согласно третьему соотношению (9), является искомым управляющим параметром, с помощью которого формируется требуемое движение ротора. Вводя, с помощью (17,а), вместо  $f(x)$  величину  $w(x)$ :

$$\ddot{X} = q \left( \frac{\beta}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) - f(x) = w(x), \quad (58)$$

приводим соотношения (18) и (21) к виду

$$\dot{x}^2 = 2 \int_{x_1}^x W(x) dx ; \quad (59)$$

$$2 \psi'' \int_{x_1}^x W(x) dx + \psi' \left[ W(x) + \frac{4}{x} \int_{x_1}^x W(x) dx \right] + \psi \left[ \frac{q}{x^3} + \frac{W(x)}{x} \right] = 0. \quad (60)$$

Зададим на участке  $[x_1, x_2]$ , соответствующем исследуемому второму этапу движения, изменение угла  $\psi$  по закону:

$$\psi(x) = (x_2 - x)^3 (ax + b), \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (61)$$

Координата  $x_2 < x_*$  выбирается из условия прохождения ротора над некоторой группой препятствий (см. рис.3) и выхода его в окрестность орбиты  $x_*$ , свободную от препятствий. Соответственно (61) имеем для производных  $\psi$ :

$$\psi' = -(x_2 - x)^2 (4ax - ax_2 + 3b); \quad \psi'' = 2(x_2 - x)(6ax - 3ax_2 + 3b). \quad (62)$$

Первый множитель в правых частях (61) и (62), с учетом также (19), (20), обеспечивает выполнение условий (55) гашения движения по углу  $\psi$  в точке  $x_2$ . Вторые множители, с неопределенными коэффициентами  $a$  и  $b$ , используются для выполнения начальных на этом участке условий (57):

$$(x_2 - x_1)^3 (ax_1 + b) = \frac{\psi_0}{\beta - 1} \cdot \frac{\beta - x_1}{x_1}; \quad -(x_2 - x_1)^2 (4ax_1 - ax_2 + 3b) = -\frac{\psi_0}{\beta - 1} \cdot \frac{\beta}{x_1^2}. \quad (63)$$

Решая (63) относительно  $a$  и  $b$ , получаем:

$$a = \frac{\psi_0}{\beta - 1} \cdot \frac{\beta(4x_1 - x_2) - 3x_1^2}{x_1^2 (x_2 - x_1)^4}; \quad b = -\frac{\psi_0}{\beta - 1} \cdot \frac{(5\beta + x_2)x_1 - 2\beta x_2 - 4x_1^2}{x_1 (x_2 - x_1)^4}. \quad (64)$$

Определив с помощью (61), (62) значения  $\psi(x)$ ,  $\psi'(x)$  и  $\psi''(x)$ , мы можем рассматривать (60) как уравнение для определения  $W(x)$ . Сделав замену

$$\int W(x) dx = u(x); \quad W(x) = u'(x), \quad (65)$$

интегральное относительно  $W(x)$  уравнение (60) можно свести к



дифференциальному уравнению первого порядка относительно  $u(x)$  :

$$Q(x) \cdot u' + R(x) \cdot u + P(x) = 0, \quad (66)$$

где коэффициенты  $Q(x)$ ,  $R(x)$  и  $P(x)$ , после приведения (60) к общему знаменателю, являются полиномами относительно  $x$  соответственно 5, 4 и 3-й степени:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_2 - x)^2 (ax + b)x^2 - (x_2 - x)(4ax - ax_2 + 3b)x^3; \\ R(x) &= 4(6ax - 3ax_2 + 3b)x^3 - 4(x_2 - x)(4ax - ax_2 + 3b)x^2; \\ P(x) &= q(x_2 - x)^2 (ax + b). \end{aligned} \quad (67)$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего исходному уравнению (66), имеет вид:

$$u_1(x) = C_1 \cdot e^{-\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx}; \quad (68)$$

после несколько громоздкого интегрирования получаем:

$$u_1(x) = C_1 \cdot (x_2 - x)^{-4} [5ax^2 + 2(2b - ax_2)x - bx_2]^{-2}. \quad (69)$$

Общее решение исходного уравнения (66) получаем методом вариации постоянной интегрирования  $C_1$ ; имеем, согласно [1], с.62:

$$u(x) = e^{-\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx} \left[ C - \int \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx} dx \right]. \quad (70)$$

После соответствующих интегрирований получаем:

$$\begin{aligned} u(x) &= [5ax^2 + 2(2b - ax_2)x - bx_2]^{-2} \cdot \left\{ \frac{C}{(x_2 - x)^4} + q \left[ \frac{5a^2}{7} (x_2 - x)^3 - \frac{a}{2} (3b + ax_2)(x_2 - x)^2 + \right. \right. \\ &+ \frac{b}{5} (4b - 3ax_2)(x_2 - x) + \frac{b}{4} (5b - 3ax_2)x_2 \left. \right] + q \frac{bx_2^2}{x_2 - x} \left[ 2b - ax_2 + \frac{x_2(7b - 3ax_2)}{2(x_2 - x)} + \right. \\ &+ \left. \frac{x_2^2(8b - 3ax_2)}{(x_2 - x)^2} + \frac{bx_2^4}{x(x_2 - x)^3} - \frac{5bx_2^3}{(x_2 - x)^3} \ln x \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Полученное решение имеет особенность при значении  $x = x_2$ , от которой можно избавиться, если положить равными нулю постоянную интегрирования  $C$  и коэффициент  $b$ :  $C = 0$ ;  $b = 0$ . В этом

случае, после некоторых упрощений, получаем окончательно:

$$u(x) = -\frac{q}{14} \cdot \frac{(x_2 - x)^2 (10x - 3x_2)}{x^2 (5x - 2x_2)^2}. \quad (71)$$

Условие  $\beta = 0$  может быть выполнено за счет значения  $X_1$ , которое оставалось неопределенным; согласно второму соотношению (64) имеем в этом случае квадратное уравнение для определения  $X_1$ , имеющее следующее решение:

$$X_1 = \frac{1}{8} \left( 5\beta + x_2 - \sqrt{(5\beta - x_2)^2 - 12\beta x_2} \right). \quad (72)$$

Здесь  $X_1$  выражено через задаваемые - из условия обхода препятствий - значения  $\beta$  и  $X_2$ . Например, если  $\beta = 4$  и  $X_2 = 3,5$ , то  $X_1 = 1,66$ , т.е.  $X_0 < X_1 < X_2$ .

Управляющий параметр  $f(x)$  определяется с помощью (58) и второго соотношения (65), где  $W(x) = u'(x)$ , т.е. производная зависимости (71) по  $x$ :

$$f(x) = q \frac{\beta - x}{x^3} - \frac{q}{7} \cdot \frac{(x_2 - x)(80x^2 x_2 - 25x^3 - 40x x_2^2 + 6x_2^3)}{x^3 (5x - 2x_2)^3}. \quad (73)$$

Другие динамические характеристики движения ротора на втором этапе определяются следующим образом.

Радиальное ускорение - согласно (58):

$$\ddot{x} = W(x) = u'(x) = \frac{q}{7} \cdot \frac{(x_2 - x)(80x^2 x_2 - 25x^3 - 40x x_2^2 + 6x_2^3)}{x^3 (5x - 2x_2)^3}. \quad (74)$$

Радиальная скорость - путем интегрирования соотношения

$$\ddot{x} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} \right) = u'(x):$$

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_1^2 + 2u(x) \Big|_{x_1}^x = \dot{x}_1^2 - \frac{q}{7} \left[ \frac{(x_2 - x)^2 (10x - 3x_2)}{x^2 (5x - 2x_2)^2} - \frac{(x_2 - x_1)^2 (10x_1 - 3x_2)}{x_1^2 (5x_1 - 2x_2)^2} \right], \quad (75)$$

где  $\dot{x}_1^2$  - квадрат радиальной скорости ротора в конце первого этапа, определяемый согласно соотношению (23) при  $x = x_1$ .

Движение по углу  $\psi$  определяется заданным соотношением

(6I) и вытекающими из него выражениями (62) производных  $\psi'$  и  $\psi''$ ; все эти величины обращаются в нуль в точке  $X = X_2$ . Угловая скорость  $\dot{\psi}$  и угловое ускорение  $\ddot{\psi}$  находятся с помощью (19), (20); (74) и (75):

$$\dot{\psi} = \psi' \cdot \dot{x} ; \quad \ddot{\psi} = \psi'' \cdot \dot{x}^2 + \psi' \cdot \ddot{x} . \quad (76)$$

Вполне очевидно, что в положении  $X = X_2$  выполняются условия (55) гашения углового движения:

$$\psi(x_2) = \dot{\psi}(x_2) = \ddot{\psi}(x_2) = 0.$$

Высота ротора над экваториальной плоскостью определяется согласно (53) или, в линейном приближении

$$z = x \cdot \psi \cdot R . \quad (77)$$

Это соотношение представляет собой уравнение траектории точки  $M$  в плоскости  $XOZ$  над участком управляемого движения  $[X_1, X_2]$ , см. рис.3.

Таким образом, путем задания параметра орбиты  $\beta$  и координаты  $X_2$  можно достичь обхода ротором некоторой группы препятствий и выхода его на выбранный свободный участок экваториальной плоскости.

Заданием специальным образом подобранного закона (6I) изменения угла  $\psi$  на участке  $[X_1, X_2]$  и определением соответствующего управляющего параметра  $f(x)$  обеспечивается гашение в точке  $X_2$  углового движения ротора. Поскольку, наряду с углом  $\psi$ , равны нулю также угловая скорость  $\dot{\psi}$  и угловое ускорение  $\ddot{\psi}$ , угловое движение в дальнейшем не возникает и ротор будет совершать только радиальное движение в плоскости экватора.

При наличии препятствий в виде спутников, станций и т.д., плоскости орбит которых отличаются от экваториальной, можно наметить следующий метод их преодоления ротором. В момент пересе-



чения ротором орбиты какого-либо из этих объектов сам этот объект должен находиться в другом месте орбиты — по одну или по другую сторону от плоскости ротора. Для преодоления некоторой системы таких объектов нужно рассчитать оптимальный, с учетом их положения и движения, момент начала движения ротора.

#### 6. Движение ротора на заключительном этапе

Движение ротора на заключительном участке  $[x_2, x_*]$  описывается уравнениями:

$$\ddot{x} = q \frac{\beta - x}{x^3} - f(x), \quad x_2 \leq x \leq x_*; \quad (78)$$

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_2^2 + q(x - x_2) \left( \beta \frac{x + x_2}{x^2 \cdot x_2^2} - \frac{2}{x \cdot x_2} \right) - 2 \int_{x_2}^x f(x) dx, \quad (79)$$

где  $f(x)$  — искомое на этом участке значение управляющего параметра,  $\dot{x}_2$  — радиальная скорость в конце предыдущего участка, вычисляемая согласно (75) при  $x = x_2$ .

Управляющий параметр находится из условия гашения радиального движения в положении, определяемом координатой орбиты  $x_* = \beta$ :

$$\ddot{x}(x_*) = 0; \quad \dot{x}(x_*) = 0. \quad (80)$$

Из (78) и первого соотношения (80) следует, что в точке  $x_*$  должно также выполняться условие обращения в нуль управляющего параметра:  $f(x_*) = 0$ . Учитывая это, будем искать  $f(x)$  в виде следующей линейной функции

$$f(x) = c \cdot (x_* - x) = c \cdot (\beta - x). \quad (81)$$

Подставляя (81) в (78) и (79), получаем уравнения движения ротора на заключительном этапе в следующем виде:

$$\ddot{x} = q \frac{\beta - x}{x^3} - c(\beta - x) = (\beta - x) \left( \frac{q}{x^3} - c \right); \quad (82)$$

$$\dot{X}^2 = \dot{X}_2^2 + q(x-x_2) \left( \beta \frac{x+x_2}{x^2 \cdot x_2^2} - \frac{2}{x \cdot x_2} \right) - C(x-x_2)(2\beta - x - x_2). \quad (83)$$

Коэффициент  $C$  определяется из условия обращения в нуль конечного значения радиальной скорости:  $\dot{X}(X_*) = 0$ . Подставляя это значение в левую часть (83) и проведя некоторые упрощения правой части при значении координаты  $x = X_* = \beta$ , получаем:

$$0 = \dot{X}_2^2 + \frac{q(\beta - x_2)^2}{\beta x_2^2} - C(\beta - x_2)^2.$$

Отсюда находим значение коэффициента  $C$ :

$$C = \frac{\dot{X}_2^2}{(\beta - x_2)^2} + \frac{q}{\beta x_2^2}. \quad (84)$$

Таким образом, определено значение управляющего параметра  $f(x)$  (81), обеспечивающего выполнение условий (80) гашения радиального движения в конце исследуемого участка и тем самым вывод ротора на постоянную орбиту в заранее заданном положении  $X_* = \beta$  в экваториальной плоскости планеты.

## 7. Расчетные формулы для реализации задачи о маневрировании ротора

Исходя из полученных результатов, предлагается следующий алгоритм решения задачи о маневрировании ротора ОТС.

1) Проводится анализ имеющихся препятствий в конкретных условиях некоторой планеты, а именно: вид препятствий (кольцо, ротор, спутник, станция и т.д.), их число и положение, наличие свободных участков между траекториями этих объектов, величина таких участков.

2) Исходя из поставленной задачи при запуске данного ротора и результатов предыдущего этапа, намечается некоторый участок экваториальной плоскости (кольцеобразной формы), свободный от

каких-либо препятствий, для выбора постоянной орбиты ротора на этом участке.

3) Задается конкретное значение  $X_* = \beta$  безразмерной координаты ротора  $X = \frac{z}{R}$ . Всего для решения некоторой конкретной задачи необходимо задать 7 основных параметров:

$R$  - радиус планеты;

$g$  - ускорение свободного падения на поверхности планеты;

$m$  - масса единицы длины ротора в начале движения;

$X_* = \beta$  - безразмерная координата задаваемой орбиты;

$X_2$  - безразмерная координата, где ротор выходит в экваториальную плоскость и происходит гашение движения ротора по углу  $\psi$  ;

$X_0 = 1$  - начальное значение безразмерной координаты ротора;

$\psi_0$  - начальное значение угла  $\psi$  , определяющее положение плоскости  $\Pi_0$  (параллельной экватору), откуда стартует ротор.

4) В зависимости от значений основных параметров вычисляются также: величина  $V_0$  стартовой скорости ротора (согласно соотношению (9)); параметр  $q$  (согласно (9)) и координата (согласно (72)), участвующие в дальнейших расчетах.

5) Свободное движение ротора (телескопическое, без сил трения между фрагментами) на участке  $[X_0, X_1]$  определяется уравнениями (23) по координате  $X$  и (40), а также (19), (20) по углу  $\psi$  . Время движения - в зависимости от положения  $X$  - определяется согласно (41), (42) или (43). Высота ротора над плоскостью экватора определяется согласно (54).

6) Управляемое движение ротора на участке  $[X_1, X_2]$  , совершаемое с целью гашения углового движения, определяется уравнениями (74), (75) по координате  $X$  и уравнениями (61), (76) по углу  $\psi$  ; управляющий параметр  $f(x)$  определяется со-



гласно (73). Время движения определяется путем численного интегрирования соотношения  $t = \int_{x_1}^x \frac{dx}{\dot{x}}$ ; высота ротора над плоскостью экватора – согласно (53) или в линейном приближении (77).

7) Управляемое движение на заключительном участке  $[x_2, x_*]$  определяется согласно (80) и (81) по координате  $X$ ; управляющий параметр – согласно (81) и (84). Время движения – в зависимости от положения ротора – также находится путем численного интегрирования выражения, аналогичного приведенному в п.6.

## 8. Задачи о маневрировании ротора в условиях Урана и Сатурна

В качестве конкретных примеров преодоления ротором некоторой произвольной системы препятствий рассмотрим задачи о маневрах в условиях Урана и Сатурна.

1. Планета Уран, согласно [4], стр.315–319, а также дополнительным сведениям, полученным по запросу от сотрудников ГАИШ В.М.Чепуровой и А.И.Кирюхиной, имеет 10 открытых в 1977 г. колец, расположенных довольно компактной группой. Из них восемь, в том числе последнее, имеют заметный эксцентриситет, т.е. эллиптичны по форме; семь колец имеют некоторое отклонение от экваториальной плоскости. Значений тех и других не имеется, но считается, что это малые величины.

В табл. I приведены значения радиусов колец  $R_n$ ,  $n$  – номер кольца, их относительных величин  $x_n = R_n/R$  (по отношению к радиусу Урана  $R = 26200$  км) и относительных расстояний между кольцами  $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ . Как следует из таблицы, вся группа колец лежит в границах  $[1.58, 1.98]$  безразмерной координаты  $x$ , откладываемой вдоль оси  $Ox$  (инерциальной системы отсчета),

расположенной в плоскости экватора. Расстояния между кольцами не превышают 0,084, что соответствует 2000 км. Учитывая неопределенность в связи с возможной эллиптичностью колец, надо признать, что этот промежуток мал для безопасного вывода ротора на орбиту в зоне колец.

Кроме колец, в 1986 г. была открыта группа десяти малых спутников Урана; орбита одного из них расположена между 8-м и 9-м кольцами, остальные девять движутся выше зоны колец, в пределах относительных радиусов [2.05, 3.28], см. табл.2. Наиболее крупный из новых спутников - последний - имеет диаметр 165 км, остальные от 25 до 100 км; расстояния между ними колеблются от 10800 км до 5000 км и меньше.

Первый из известных ранее спутников - Миранда - имеет диаметр 483 км и радиус орбиты 129000 км, табл.2, № II,  $X_{II} = 4,92$ . Между ним и 10-м спутником имеется большой промежуток шириной  $\Delta X = 1,64$  (43000 км), свободный, как считается, от колец и спутников.

Задаем орбиту ротора в этом промежутке в положении  $X_* = \beta = 4,6$ , т.е. примерно на 2/3 расстояния между 10-м и 11-м спутниками.

Согласно (45), стартовая скорость ротора, необходимая для достижения заданной орбиты, имеет значение

$$V_0 = \frac{1}{\cos \psi_0} \sqrt{\beta g R} = 35,58 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 35,58 \text{ км/с},$$

где  $\psi_0 = 0,1$  - значение угла, определяющего стартовое положение  $M_0$  ротора по отношению к экватору (рис.1);  $g = 10,4 \text{ м/с}^2$  - ускорение силы тяжести на поверхности Урана;  $R = 2,62 \cdot 10^7 \text{ м}$  - радиус экватора. Отметим, что величины первой и второй космической скорости (критической для свободного движения ротора) на Уране

Таблица I

Радиусы и взаимное положение колец Урана

№ П	№ П	Радиус $R_n$ (км)	Относительный радиус $X_n$	Разность высот $\Delta X = X_n - X_{n-1}$	Выбранные зна- чения $X_2, X_*$
1	2	3	4	5	
I	1	41600	1,58777	0,58777	
	2	42000	1,60306	0,01529	
	3	42400	1,61831	0,01525	
	4	44600	1,70227	0,08396	
	5	45600	1,74044	0,03817	
	6	47200	1,80151	0,06107	
	7	47600	1,81678	0,01527	
	8	48400	1,84731	0,03053	
	9	50200	1,91601	0,06870	
IO	10	51800	1,97708	0,06107	

Таблица 2

Радиусы орбит и взаимное положение первых II спутников Урана

1	2	3	4	5
I	49750	1,89846	0,05115	
2	53770	2,05187	0,07479	
3	59160	2,25755	0,20568	
4	61770	2,35714	0,09959	
5	62650	2,39072	0,03358	
6	64630	2,46628	0,07656	
7	66100	2,52238	0,05610	
8	69930	2,66853	0,14615	
9	75200	2,86963	0,20110	
IO	86000	3,28176	0,41213	$X_2 = 4,0$
II	129000	4,92367	1,64191	$X_* = 4,6$

Примечания к таблицам.

1. Разность  $\Delta X = X_1 - X_0 = 0,58777$  означает относительное расстояние первого кольца от поверхности планеты.

2. Первый спутник находится между 8-м и 9-м кольцами, второй - выше 10-го. Соответственно  $\Delta X$  для них означает разность высот 8-го кольца и I-го спутника, 10-го кольца и 2-го спутника.



имеют значения:  $V_1 = 16,5$  км/с,  $V_2 = 23$  км/с, [5], с.68.

Для точки  $X_2$ , где ротор должен выйти в экваториальную плоскость, погасив при этом угловое движение по  $\Psi$ , берем значение  $X_2 = 4,0$ , т.е. за пределами группы 10 колец и 10 малых спутников. Координата  $X_1$ , где начинается управляемое движение ротора, определяется согласно (72) и имеет значение  $X_1 = 1,895$ , т.е. на участке между 8-м и 9-м кольцами (см. табл. I).

Таким образом, задаваемая картина движения ротора такова. Начиная движение из положения  $M_0$  на поверхности Урана, ротор на участке  $[X_0, X_1]$  совершает свободное движение (без сил трения между фрагментами). На участке  $[X_1, X_2]$  - управляемое движение с целью погасить угловое движение по  $\Psi$ ; на этих двух участках ротор проходит над плоскостью экватора на высоте  $Z = X \cdot \Psi \cdot R$ , преодолевая тем самым все 10 колец и 10 малых спутников Урана.

На последнем участке  $[X_2, X_*]$  ротор движется в плоскости экватора; здесь происходит гашение радиальной части движения и выход на постоянную, заранее определенную орбиту  $X_* = \beta = 4,6$ .

Исходные данные задачи, таблицы, графики и их анализ приведены ниже, см. часть III.

II. Из планет-гигантов Солнечной системы Сатурн имеет наиболее внушительную и сложную систему колец и спутников [4], с.329-331; [6], с.162, [7], с.25. Система главных колец D, C, B, A, F, G, E фактически состоит из большого числа отдельных, более узких, а также множества промежуточных, невидимых с Земли колец и составляет почти сплошное единое кольцо, простирающееся едва ли не от атмосферы планеты до расстояния в  $8R$ , где  $R = 6,01 \cdot 10^7$  м - радиус Сатурна. В относительных величинах  $X_n = R_n/R$  это составляет интервал  $[1; 8]$ . В промежутках между от-

дельными кольцами, составляющими внешние кольца G и E, движется около 12 спутников Сатурна.

Первый большой спутник Рея, находящийся за пределами колец, имеет относительный радиус орбиты  $X \approx 8,5$ , затем следует большой, шириной  $\Delta X \approx 11,5$  свободный промежуток до наиболее крупного спутника Титана ( $X \approx 20$ ).

Не вдаваясь в не совсем еще ясную картину отдельных колец системы, их радиусов, интервалов между ними, а также движущихся среди них спутников, зададимся целью вывести ротор ОТС в указанный выше промежуток между спутниками Реей и Титаном. Для этого полагаем:  $X_2 = 10$ ;  $X_* = \beta = 12$ ; соответственно  $X_1 = 4,68$ .

Соответствующая начальная скорость ротора, определяемая аналогично предыдущей (при этом по-прежнему  $\psi_0 = 0,1$ , а ускорение силы тяжести на Сатурне  $g = 9,54 \text{ м/с}^2$ ), имеет значение  $V_0 = 83 \text{ км/с}$ . Величины первой и второй космических скоростей равны:  $V_1 = 24 \text{ км/с}$ ,  $V_2 = 34 \text{ км/с}$ . Учтем, что эти значения представляют собой абсолютные скорости, вычисляемые как сумма переносной скорости от вращательного движения Сатурна и относительной скорости по отношению к точкам стартовой позиции:  $V_a = V_e + V_r$ , - где  $V_e = \Omega \cdot R \approx 10 \text{ км/с}$ ,  $\Omega = 1,68 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  - угловая скорость Сатурна [6]. Тогда величины относительных составляющих приведенных выше скоростей (достигаемые за счет разгона ротора) составляют соответственно: 73 км/с, 14 км/с и 24 км/с.

Картина задаваемого движения ротора аналогична описанной в предыдущем случае.

Чтобы не загромождать алгоритм, программу и таблицы, приводимые ниже, в них не содержится вычисление угловой скорости  $\dot{\varphi}$  и угла  $\varphi$  собственного вращения ротора, в данном случае не пред-



ставляющие какого-либо интереса.

### Ш. Анализ результатов решения задач на ЭВМ.

Результаты решения задачи о маневрировании ротора в условиях Урана представлены в табл.3 и на рисунках 4, 5, 6.

Первая строка таблицы содержит исходные данные задачи, следующие строки – значения указанных динамических характеристик с изменением аргумента  $X$  на величину  $\Delta X = 0,1$ , что соответствует радиальному перемещению ротора на 2620 км. Поскольку счет ведется по конечным формулам, то столь большая величина шага не влияет на точность получаемых числовых значений: для взятых значений аргумента все вычисляемые величины имеют точные значения. Исключение может составлять время движения  $T$ , особенно на заключительной части движения; для повышения его точности необходимо уменьшать величину шага  $\Delta X$ .

Для наглядности по табличным данным построены графики. На рис.4 представлены графики изменения в зависимости от радиальной координаты  $X$  ротора группы динамических характеристик, связанных с радиальным движением – радиальной скорости  $V = \dot{X} \cdot R$  (м/с), радиального ускорения  $W = \ddot{X} \cdot R$  (м/с<sup>2</sup>) и высоты ротора над плоскостью экватора  $Z = X \cdot \psi \cdot R$  (м). При этом истинные значения величин равны графическим, умноженным на 10 в указанных на графиках степенях; более того, в силу больших амплитуд изменения значений некоторых величин их порядок на различных этапах может быть разным.

Положение препятствий отмечено следующим образом: 10 колец Урана – жирными точками, обозначающих пересечения кольцами вертикальной плоскости  $XOZ$ , их положение взято из табл.1; 10 новых спутников – звездочками, обозначающих пересечения орбит с той же плоскостью, их положение соответствует данным табл.2.



Таблица 3. Задача о маневрировании в условиях Урана

R= 2.6200000E+07; G= 10.40000; M= 100; X0= 1.000000; X2= 4.000000; B= 4.600000; F0= 9.9999994E-02; IX= 9.9999994E-02;

X	V	W	T	P	PT	PTT	Z	FT
0.10000E+01	0.00000E+00	0.37440E+02	0.00000E+00	0.10000E+00	0.00000E+00	-0.18260E-06	0.26200E+07	
0.11000E+01	0.12961E+05	0.27348E+02	0.33690E+01	0.88384E-01	-0.52241E-04	-0.63239E-07	0.25472E+07	
0.12000E+01	0.17093E+05	0.20463E+02	0.59237E+01	0.78704E-01	-0.57890E-04	-0.63597E-08	0.24744E+07	
0.13000E+01	0.19647E+05	0.15621E+02	0.81464E+01	0.70513E-01	-0.56696E-04	0.20327E-07	0.24017E+07	
0.14000E+01	0.21406E+05	0.12128E+02	0.10186E+02	0.63492E-01	-0.53264E-04	0.31989E-07	0.23289E+07	
0.15000E+01	0.22687E+05	0.95526E+01	0.12111E+02	0.57407E-01	-0.49175E-04	0.36068E-07	0.22561E+07	
0.16000E+01	0.23652E+05	0.76172E+01	0.13957E+02	0.52083E-01	-0.45060E-04	0.36336E-07	0.21833E+07	
0.17000E+01	0.24399E+05	0.61388E+01	0.15747E+02	0.47386E-01	-0.41174E-04	0.34751E-07	0.21106E+07	
0.18000E+01	0.24987E+05	0.49931E+01	0.17495E+02	0.43210E-01	-0.37612E-04	0.32340E-07	0.20378E+07	
0.18949E+01	0.25436E+05	0.41346E+01	0.19211E+02	0.39654E-01	-0.34547E-04	0.29783E-07	0.19687E+07	
0.19949E+01	0.29951E+05	0.88832E+01	0.20669E+02	0.36075E-01	-0.41031E-04	-0.75165E-07	0.18855E+07	-0.14333E+11
0.20949E+01	0.30499E+05	0.44243E+01	0.22101E+02	0.32493E-01	-0.41509E-04	0.34512E-08	0.17835E+07	-0.41674E+10
0.21949E+01	0.30783E+05	0.24720E+01	0.23519E+02	0.28960E-01	-0.41049E-04	0.58676E-07	0.16654E+07	-0.27928E+09
0.22949E+01	0.30947E+05	0.14910E+01	0.24930E+02	0.25521E-01	-0.39903E-04	0.10179E-06	0.15345E+07	0.12901E+10
0.23949E+01	0.31048E+05	0.94903E+00	0.26337E+02	0.22216E-01	-0.38215E-04	0.13677E-06	0.13940E+07	0.18876E+10
0.24949E+01	0.31114E+05	0.62821E+00	0.27740E+02	0.19082E-01	-0.36086E-04	0.16530E-06	0.12473E+07	0.20475E+10
0.25949E+01	0.31158E+05	0.42815E+00	0.29142E+02	0.16148E-01	-0.33601E-04	0.18817E-06	0.10978E+07	0.20050E+10
0.26949E+01	0.31188E+05	0.29825E+00	0.30542E+02	0.13438E-01	-0.30836E-04	0.20580E-06	0.94884E+06	0.18708E+10
0.27949E+01	0.31209E+05	0.21115E+00	0.31941E+02	0.10972E-01	-0.27861E-04	0.21841E-06	0.80348E+06	0.16996E+10
0.28949E+01	0.31224E+05	0.15122E+00	0.33340E+02	0.87640E-02	-0.24746E-04	0.22615E-06	0.66473E+06	0.15188E+10
0.29949E+01	0.31235E+05	0.10911E+00	0.34738E+02	0.68214E-02	-0.21558E-04	0.22910E-06	0.53525E+06	0.13422E+10
0.30949E+01	0.31243E+05	0.78994E-01	0.36135E+02	0.51475E-02	-0.18363E-04	0.22733E-06	0.41740E+06	0.11764E+10
0.31949E+01	0.31248E+05	0.57159E-01	0.37533E+02	0.37399E-02	-0.15225E-04	0.22086E-06	0.31306E+06	0.10242E+10
0.32949E+01	0.31252E+05	0.41140E-01	0.38930E+02	0.25909E-02	-0.12212E-04	0.20973E-06	0.22366E+06	0.88632E+09
0.33949E+01	0.31255E+05	0.29280E-01	0.40327E+02	0.16871E-02	-0.93861E-05	0.19396E-06	0.15007E+06	0.76248E+09
0.34949E+01	0.31257E+05	0.20434E-01	0.41724E+02	0.10102E-02	-0.68135E-05	0.17355E-06	0.92500E+05	0.65183E+09
0.35949E+01	0.31259E+05	0.13801E-01	0.43121E+02	0.53604E-03	-0.45585E-05	0.14853E-06	0.50488E+05	0.55332E+09
0.36949E+01	0.31260E+05	0.88106E-02	0.44518E+02	0.23536E-03	-0.26853E-05	0.11889E-06	0.22784E+05	0.46580E+09
0.37949E+01	0.31260E+05	0.50503E-02	0.45915E+02	0.73426E-04	-0.12585E-05	0.84637E-07	0.73005E+04	0.38816E+09
0.38949E+01	0.31260E+05	0.22185E-02	0.47312E+02	0.10137E-04	-0.34222E-06	0.45784E-07	0.10345E+04	0.31933E+09
0.39949E+01	0.31261E+05	0.92368E-04	0.48709E+02	0.11734E-08	-0.82678E-09	0.23293E-08	0.12281E+00	0.25835E+09
0.40000E+01	0.31261E+05	0.00000E+00	0.50105E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.25545E+09
0.41000E+01	0.26051E+05	-0.51799E+02	0.51782E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.13591E+12
0.42000E+01	0.20842E+05	-0.41443E+02	0.53877E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.10873E+12
0.43000E+01	0.15632E+05	-0.31085E+02	0.56670E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.81546E+11
0.44000E+01	0.10421E+05	-0.20725E+02	0.60860E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.54364E+11
0.45000E+01	0.52109E+04	-0.10363E+02	0.69240E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.27182E+11
0.46000E+01	0.00000E+00	-0.49420E-04	0.69240E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.12961E+06
0.46000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.69240E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00



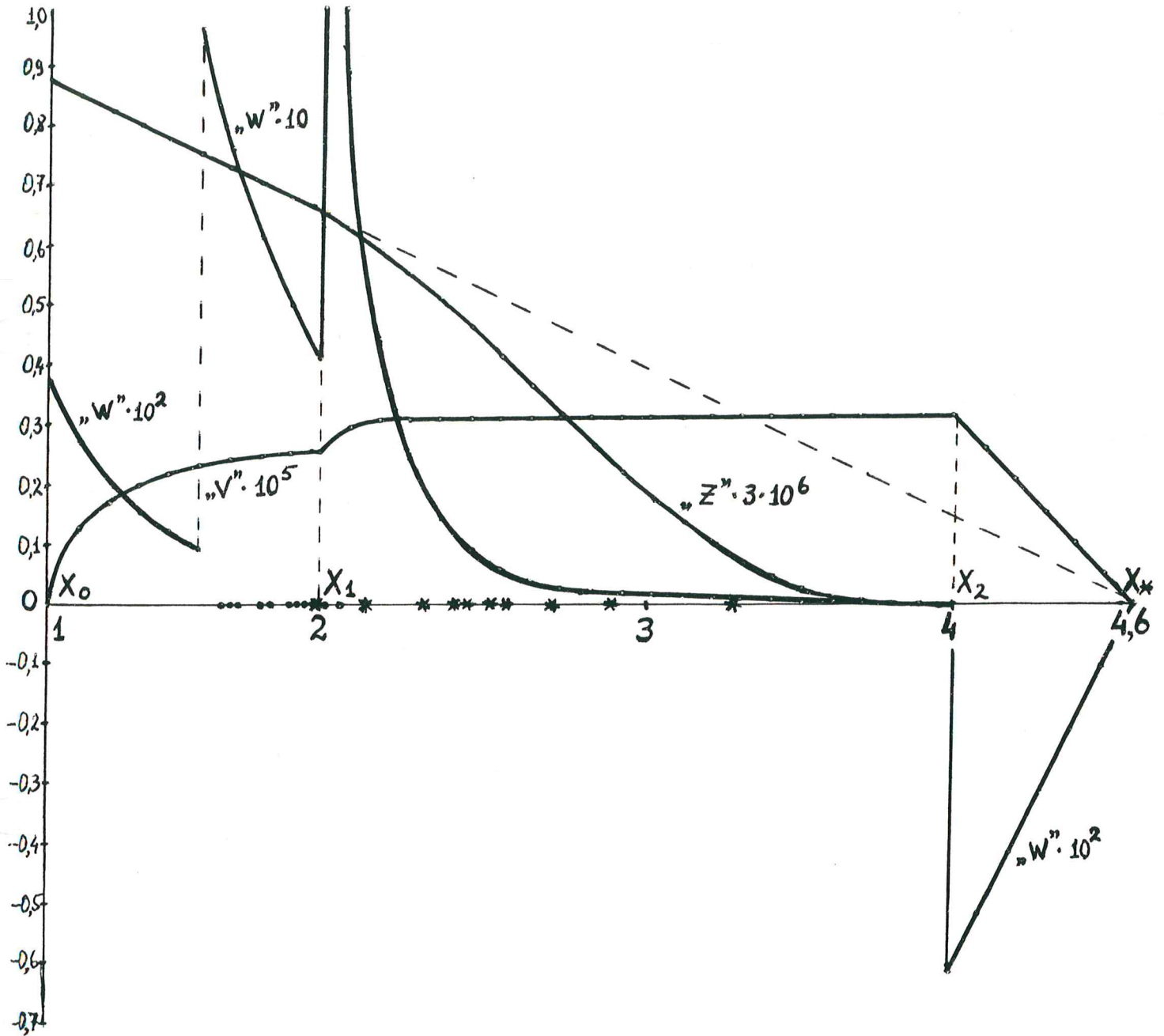


Рис.4. Графики радиальной скорости  $V$ , радиального ускорения  $W$  и высоты ротора  $Z$

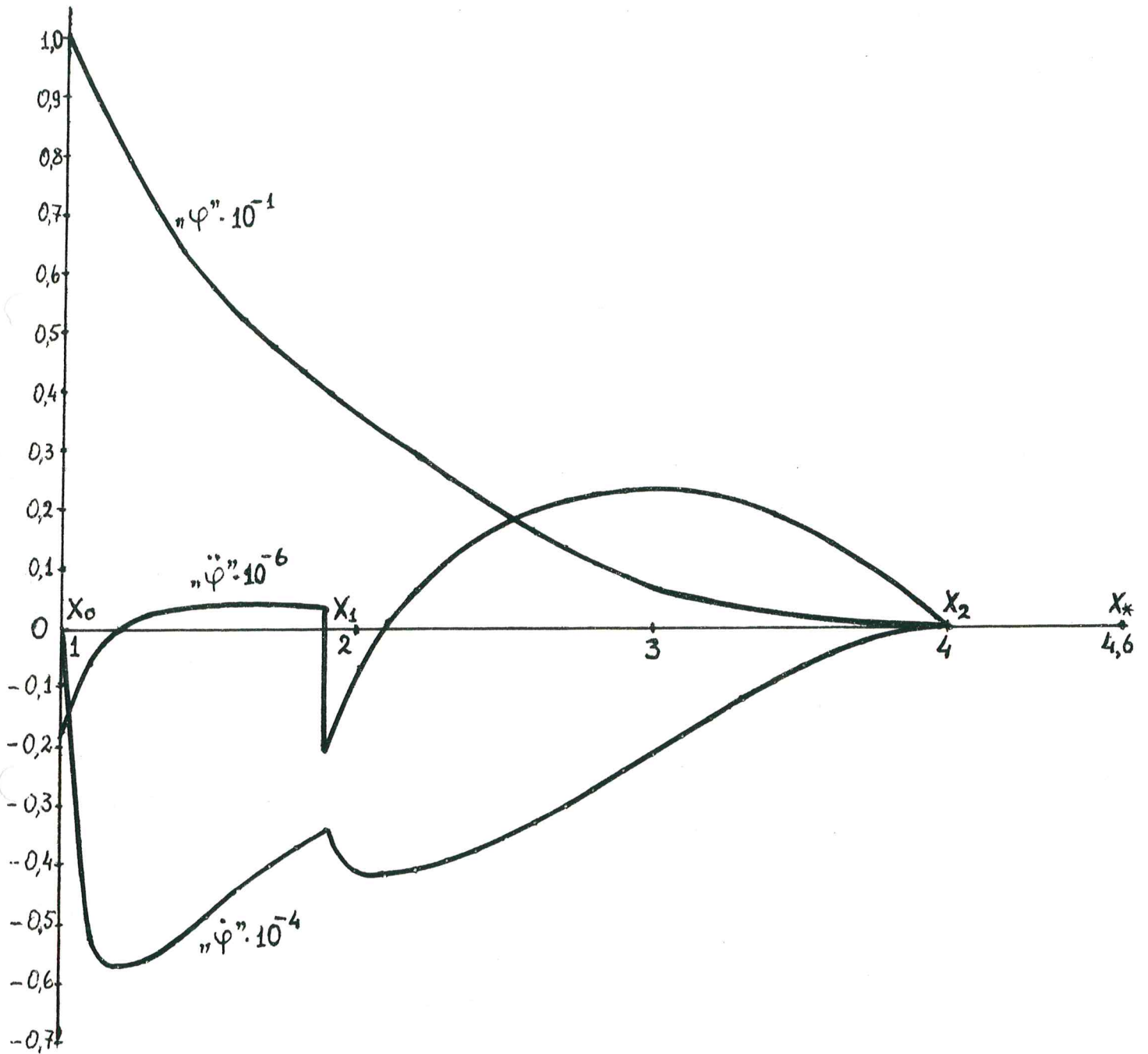


Рис.5. Графики угла  $\psi$ , угловой скорости  $\dot{\psi}$  и углового ускорения  $\ddot{\psi}$



На рис.5 представлены графики динамических характеристик движения ротора по отношению к плоскости экватора, а именно: угол  $\Psi$  (рад), угловая скорость  $\dot{\Psi}$  (рад/сек) и угловое ускорение  $\ddot{\Psi}$  (рад/с<sup>2</sup>); аналогично предыдущему, истинные значения равны графическим, умноженным на 10 в указанных степенях. Как видно из полученных результатов, две последние величины меньше первой в среднем на 3 и 6 порядков соответственно, что позволяет оценить погрешность проведенной линеаризации исходных дифференциальных уравнений (10) по параметру  $\Psi$  и его производным.

На рис.6 представлены графики времени  $T$  (мин) и суммарной силы трения  $F_{тр}$  (н), действующей на фрагменты ротора при их раздвижении.

Первый этап движения - свободное расширение ротора - происходит на участке  $[x_0, x_1]$ . Высота  $Z$  ротора изменяется линейно в зависимости от радиальной координаты  $X$  от значения  $Z_0 = 0,262 \cdot 10^7$  м = 2620 км до  $Z_1 = 0,197 \cdot 10^7$  м = 1970 км, т.е. ротор проходит достаточно высоко над плоскостью экватора.

Второй этап - гашение движения по углу  $\Psi$  - происходит на участке  $[x_1, x_2]$ . Включение сил трения приводит к скачкам ускорений: радиального  $W$  и углового  $\ddot{\Psi}$  и, соответственно, к угловым точкам графиков соответствующих скоростей. В конце этого этапа, т.е. в точке  $x_2$ , обращаются в нуль следующие величины: радиальное ускорение  $W$  (в силу соотношения (74)), угловое ускорение  $\ddot{\Psi}$ , угловая скорость  $\dot{\Psi}$ , угол  $\Psi$  и высота ротора над экватором  $Z$ . При прохождении над 10-м малым спутником, когда  $X = 3,28176 \approx 3,3$ , превышение ротора над его орбитой составляет величину  $Z = 0,224 \cdot 10^6$  м = 224 км.

Сила трения в самом начале этого этапа имеет отрицательные

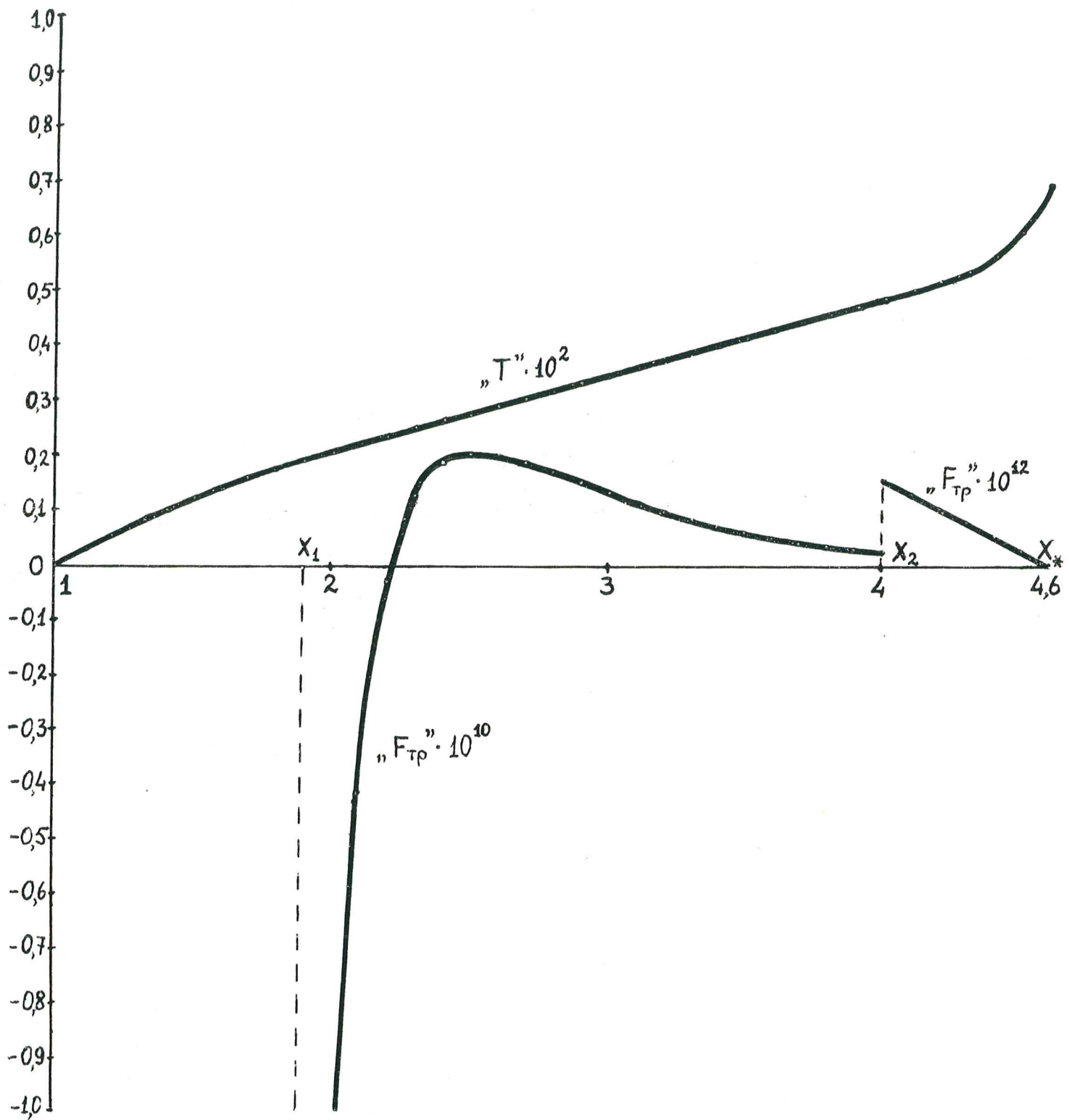


Рис.6. Графики времени движения  $T$  и силы трения  $F_{\text{тр}}$

значения, что означает не торможение, а ускорение радиального движения ротора. Вместо силы трения здесь, очевидно, требовалось бы использовать другие взаимодействия – электромагнитное, давление сжатой жидкости, газа и т.д. Но появление такой силы является, вероятнее всего, следствием используемого в параграфе 5 способа гашения углового движения и, возможно, при выборе другого способа от этого явления можно избавиться.

В дальнейшем сила  $F_{\text{тр}}$ , изменив знак (т.е. став тормозящей, как и положено силам трения), достигает максимума в точке  $x = 0,25949 \cdot 10$ , обеспечивая в итоге гашение углового движения по  $\psi$  и обращение в нуль радиального ускорения  $W$ . Радиальная скорость ротора  $V$  достигает при этом наибольшей величины  $V_2 = 0,31261 \cdot 10^5$  м/с = 31,26 км/с.

Гашение этой скорости происходит на третьем этапе – участке  $[x_2, x_*]$ ,  $x_* = \beta = 4,6$ . Радиальное ускорение, вслед за силой  $F_{\text{тр}}$ , резко изменяется, становясь отрицательным, что и приводит к гашению радиальной скорости. В конце этапа происходит полное гашение радиального движения вместе с самой силой трения:

$$W(x_*) = 0; \quad V(x_*) = 0; \quad F_{\text{тр}}(x_*) = 0,$$

что означает выход ротора на постоянную орбиту.

Следует отметить, что величина сил трения между фрагментами, как на втором, так и в особенности на третьем этапах, достигает очень больших значений, что связано с большими величинами кинетических энергий гасимых частей движения ротора – углового по  $\psi$  и радиального. Уменьшению сил трения, например на третьем этапе, может способствовать: 1) увеличение ширины этого этапа  $\Delta x = x_* - x_2$ ; 2) введение вместо линейного закона изменения  $F_{\text{тр}}$ , образующей на участке  $[x_2, x_*]$  треугольник, трапецевидного



закона, когда на большей части участка она постоянна, а затем уже убывает до нуля по линейному или еще какому-либо закону. Геометрически уменьшение  $F_{тр}$  можно определить из равенства площадей треугольника и трапеции, численно равных работе (в полубезразмерной форме) сил трения, которая идет на погашение кинетической энергии радиального движения ротора.

Некоторые другие возможные методы, приводящие к уменьшению величины  $F_{тр}$ , обсуждаются, в качестве проблем для дальнейших исследований, в следующем параграфе.

Время движения  $T$  (мин) в зависимости от положения  $X$  ротора представлено на рис.6. К концу движения ротора темп нарастания времени резко увеличивается, что говорит о замедлении радиального движения и очень плавном подходе ротора к орбите. Общее время движения имеет порядок:

- 1) при подходе к ближайшей окрестности орбиты (допустим,  $X = 4,40$ )  $T = 60,86$  мин;
- 2) при выходе на орбиту  $T_* = 69,24$  мин.

Аналогичная картина движения ротора и в условиях Сатурна. Результаты решения представлены в табл.4. Напомним, что область колец простирается до  $X = 8$ , орбит малых спутников, включая Рею, до  $X = 8,5$ ; выбраны значения:  $X_2 = 10$ ,  $X_* = \beta = 12$ .

Графики динамических характеристик совершенно аналогичны приведенным на рис. 4, 5, 6, за исключением, конечно, отличий в числовых значениях, что хорошо просматривается по таблицам; поэтому такие графики не приводятся.



Таблица 4. Задача о маневрировании в условиях Сатурна

R= 6.0100000E+07; G= 9.540000; M= 100; X0= 1.000000; X2= 10.00000; E= 12.00000; FO= 9.9999994E-02; IX= 0.2000000;

X	V	W	T	P	PT	PTT	Z	FT
0.10000E+01	0.00000E+00	0.10494E+03	0.00000E+00	0.10000E+00	0.00000E+00	-0.19048E-06	0.60100E+07	
0.12000E+01	0.43717E+05	0.59625E+02	0.45825E+01	0.81818E-01	-0.55106E-04	-0.83510E-08	0.59007E+07	
0.14000E+01	0.55157E+05	0.36853E+02	0.82146E+01	0.68831E-01	-0.51081E-04	0.32841E-07	0.57915E+07	
0.16000E+01	0.61340E+05	0.24223E+02	0.11480E+02	0.59091E-01	-0.43493E-04	0.38313E-07	0.56822E+07	
0.18000E+01	0.65170E+05	0.16685E+02	0.14555E+02	0.51515E-01	-0.36510E-04	0.34641E-07	0.55729E+07	
0.20000E+01	0.67726E+05	0.11925E+02	0.17513E+02	0.45455E-01	-0.30733E-04	0.29222E-07	0.54636E+07	
0.22000E+01	0.69521E+05	0.87802E+01	0.20394E+02	0.40496E-01	-0.26073E-04	0.24125E-07	0.53544E+07	
0.24000E+01	0.70830E+05	0.66250E+01	0.23222E+02	0.36364E-01	-0.22321E-04	0.19834E-07	0.52451E+07	
0.26000E+01	0.71811E+05	0.51022E+01	0.26012E+02	0.32867E-01	-0.19282E-04	0.16353E-07	0.51358E+07	
0.28000E+01	0.72564E+05	0.39982E+01	0.28773E+02	0.29870E-01	-0.16800E-04	0.13563E-07	0.50265E+07	
0.30000E+01	0.73153E+05	0.31800E+01	0.31512E+02	0.27273E-01	-0.14754E-04	0.11331E-07	0.49173E+07	
0.32000E+01	0.73621E+05	0.25620E+01	0.34233E+02	0.25000E-01	-0.13050E-04	0.95371E-08	0.48080E+07	
0.34000E+01	0.73998E+05	0.20874E+01	0.36940E+02	0.22995E-01	-0.11619E-04	0.80875E-08	0.46987E+07	
0.36000E+01	0.74305E+05	0.17176E+01	0.39636E+02	0.21212E-01	-0.10407E-04	0.69076E-08	0.45895E+07	
0.38000E+01	0.74558E+05	0.14256E+01	0.42323E+02	0.19617E-01	-0.93721E-05	0.59401E-08	0.44802E+07	
0.40000E+01	0.74768E+05	0.11925E+01	0.45003E+02	0.18182E-01	-0.84822E-05	0.51409E-08	0.43709E+07	
0.42000E+01	0.74944E+05	0.10044E+01	0.47676E+02	0.16883E-01	-0.77117E-05	0.44759E-08	0.42616E+07	
0.44000E+01	0.75092E+05	0.85115E+00	0.50344E+02	0.15702E-01	-0.70405E-05	0.39187E-08	0.41524E+07	
0.46000E+01	0.75217E+05	0.72528E+00	0.53007E+02	0.14625E-01	-0.64523E-05	0.34488E-08	0.40431E+07	
0.48000E+01	0.75263E+05	0.68112E+00	0.55669E+02	0.14218E-01	-0.62366E-05	0.32810E-08	0.39992E+07	
0.48803E+01	0.76900E+05	0.18492E+01	0.58274E+02	0.13215E-01	-0.64435E-05	-0.23874E-08	0.38761E+07	-0.76017E+10
0.50803E+01	0.77112E+05	0.98913E+00	0.60872E+02	0.12207E-01	-0.64677E-05	0.44704E-09	0.37270E+07	-0.29188E+10
0.52803E+01	0.77231E+05	0.58351E+00	0.63466E+02	0.11202E-01	-0.64238E-05	0.28827E-08	0.35549E+07	-0.88993E+09
0.54803E+01	0.77303E+05	0.36835E+00	0.66057E+02	0.10210E-01	-0.63206E-05	0.50371E-08	0.33628E+07	0.57308E+08
0.56803E+01	0.77350E+05	0.24426E+00	0.68647E+02	0.92390E-02	-0.61647E-05	0.69553E-08	0.31541E+07	0.50901E+09
0.58803E+01	0.77382E+05	0.16808E+00	0.71236E+02	0.82964E-02	-0.59622E-05	0.86570E-08	0.29320E+07	0.71553E+09
0.60803E+01	0.77404E+05	0.11900E+00	0.73824E+02	0.73889E-02	-0.57183E-05	0.10152E-07	0.27001E+07	0.79471E+09
0.62803E+01	0.77420E+05	0.86160E-01	0.76412E+02	0.65223E-02	-0.54384E-05	0.11445E-07	0.24618E+07	0.80608E+09
0.64803E+01	0.77431E+05	0.63498E-01	0.78999E+02	0.57017E-02	-0.51277E-05	0.12540E-07	0.22206E+07	0.78131E+09
0.66803E+01	0.77440E+05	0.47460E-01	0.81586E+02	0.49316E-02	-0.47912E-05	0.13437E-07	0.19800E+07	0.73788E+09
0.68803E+01	0.77446E+05	0.35868E-01	0.84173E+02	0.42154E-02	-0.44341E-05	0.14140E-07	0.17431E+07	0.68569E+09
0.70803E+01	0.77451E+05	0.27341E-01	0.86759E+02	0.35560E-02	-0.40614E-05	0.14647E-07	0.15132E+07	0.63039E+09
0.72803E+01	0.77455E+05	0.20974E-01	0.89346E+02	0.29553E-02	-0.36781E-05	0.14959E-07	0.12931E+07	0.57522E+09
0.74803E+01	0.77458E+05	0.16160E-01	0.91932E+02	0.24147E-02	-0.32892E-05	0.15078E-07	0.10856E+07	0.52200E+09
0.76803E+01	0.77460E+05	0.12479E-01	0.94519E+02	0.19345E-02	-0.28998E-05	0.15002E-07	0.89294E+06	0.47170E+09
0.78803E+01	0.77461E+05	0.96388E-02	0.97105E+02	0.15145E-02	-0.25149E-05	0.14733E-07	0.71726E+06	0.42475E+09
0.80803E+01	0.77463E+05	0.74300E-02	0.99691E+02	0.11535E-02	-0.21394E-05	0.14271E-07	0.56018E+06	0.38133E+09
0.82803E+01	0.77464E+05	0.57008E-02	0.10228E+03	0.84977E-03	-0.17784E-05	0.13615E-07	0.42288E+06	0.34140E+09
0.84803E+01	0.77465E+05	0.43395E-02	0.10486E+03	0.60060E-03	-0.14369E-05	0.12766E-07	0.30610E+06	0.30482E+09
0.86803E+01	0.77465E+05	0.32629E-02	0.10745E+03	0.40259E-03	-0.11198E-05	0.11723E-07	0.21002E+06	0.27141E+09
0.88803E+01	0.77466E+05	0.24085E-02	0.11004E+03	0.25156E-03	-0.83222E-06	0.10487E-07	0.13426E+06	0.24095E+09
0.90803E+01	0.77466E+05	0.17286E-02	0.11262E+03	0.14254E-03	-0.57907E-06	0.90580E-08	0.77789E+05	0.21321E+09
0.92803E+01	0.77466E+05	0.11868E-02	0.11521E+03	0.69811E-04	-0.36539E-06	0.74358E-08	0.38937E+05	0.18797E+09
0.94803E+01	0.77466E+05	0.75468E-03	0.11779E+03	0.26853E-04	-0.19615E-06	0.56204E-08	0.15300E+05	0.16502E+09
0.96803E+01	0.77466E+05	0.41025E-03	0.12038E+03	0.63833E-05	-0.76356E-07	0.36119E-08	0.37137E+04	0.14415E+09
0.98803E+01	0.77466E+05	0.13618E-03	0.12297E+03	0.34202E-06	-0.11003E-07	0.14102E-08	0.20309E+03	0.12519E+09
0.10000E+02	0.77466E+05	0.00000E+00	0.12555E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.11467E+09
0.10200E+02	0.69720E+05	-0.44931E+02	0.12843E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.27013E+12
0.10400E+02	0.61974E+05	-0.39940E+02	0.13166E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.24012E+12
0.10600E+02	0.54227E+05	-0.34948E+02	0.13535E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.21010E+12
0.10800E+02	0.46481E+05	-0.29956E+02	0.13966E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.18009E+12
0.11000E+02	0.38734E+05	-0.24964E+02	0.14483E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.15007E+12
0.11200E+02	0.30988E+05	-0.19971E+02	0.15130E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.12006E+12
0.11400E+02	0.23241E+05	-0.14979E+02	0.15992E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.90045E+11
0.11600E+02	0.15494E+05	-0.99859E+01	0.17285E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.60030E+11
0.11800E+02	0.77471E+04	-0.49930E+01	0.19871E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.30015E+11
0.12000E+02	0.00000E+00	-0.47617E-04	0.19871E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.28624E+06
0.12000E+02	0.00000E+00	0.00000E+00	0.19871E+03	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00



## 9. Выводы и рекомендации

В работе исследуется задача о выходе ротора ОТС на орбиту в случае, когда его стартовая позиция находится в плоскости, параллельной плоскости экватора. В этом случае открывается возможность совершения ротором маневра по преодолению некоторой системы препятствий, расположенных в экваториальной плоскости, в которой, кстати, только и может находиться орбита ротора. Требовалось, не углубляясь в детали устройства ротора, некоторых его свойств, конкретных условий движения, т.е. при самых общих предположениях относительно модели ротора и его движения найти условия, обеспечивающие необходимый маневр, соответствующие управляющие воздействия, разработать методику определения динамических характеристик движения.

В рамках принятой модели ротора получены дифференциальные уравнения движения с тремя степенями свободы. Решение задачи проводилось в предположении малости угла  $\Psi$  и его производных, определяющих динамику ротора по отношению к плоскости экватора. Линеаризация, на основе этого, исходных уравнений движения позволила, во-первых, разделить уравнения по двум обобщенным координатам, и, во-вторых, определить соответствующие первые интегралы.

Вторым существенным шагом, позволившим найти решение задачи, был переход к новой независимой переменной – безразмерному радиусу  $X$  ротора. В этом случае, используя упомянутые первые интегралы, также выраженные в функции  $X$ , удалось свести дифференциальное уравнение по третьей обобщенной координате (углу  $\Psi$ ) к неоднородному линейному уравнению второго порядка с пере-



менными коэффициентами, содержащему неизвестный управляющий параметр  $f(x)$ .

Для решения задачи о маневрировании ротора возникла необходимость определения динамической картины свободного движения, когда сила трения между фрагментами и ее безразмерный аналог  $f(x)$  отсутствуют. Получено решение указанного выше уравнения относительно угла  $\psi$  в конечной форме, откуда следует интересный и несколько неожиданный вывод: в свободном движении ротор пересекает плоскость экватора только в единственном положении, совпадающем с положением постоянной орбиты.

Анализ динамики свободного движения ротора выявил два возможных режима движения, зависящих от значения параметра орбиты  $\beta$  или, в итоге, стартовой скорости ротора  $V_0$ . Для  $1 < \beta < 2$  или  $V_1 < V < V_2$ , где  $V_1, V_2$  — первая и вторая космические скорости в условиях данной планеты, — движение ротора по всем трем обобщенным координатам является колебательным относительно положения орбиты. Определены характерные параметры колебаний: размахи, период и т.д. Для  $\beta \geq 2$  или  $V_0 \geq V_2$  имеем критический режим движения, когда ротор проходит положение орбиты и удаляется затем от планеты на бесконечность.

Введение сил трения между фрагментами отодвигает границу критического режима в сторону увеличения  $\beta$  (и  $V_0$ ) и расширения, тем самым, области расположения орбит роторов ОТС. Об этом, в частности, свидетельствуют приведенные примеры движения в условиях Урана ( $\beta = 4,6$ ) и Сатурна ( $\beta = 12$ ).

Из проведенного анализа вытекает методика решения задачи о маневрировании: 1) задавать орбиту в той части экваториальной плоскости, где нет каких-либо препятствий; 2) задавать закон из-

менения угла  $\psi$ , удовлетворяющий условиям одновременного гашения  $\psi$ ,  $\dot{\psi}$  и  $\ddot{\psi}$ ; 3) управляющий параметр  $f(x)$  выбирать из условий раздельного гашения двух частей движения – сначала по углу  $\psi$ , а затем радиального.

Для определения  $f(x)$  на этапе гашения углового движения найдено решение в конечной форме дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами в виде полиномов довольно высокой степени.

На заключительном этапе гашения радиального движения управляющий параметр  $f(x)$  ищется в виде линейной функции от  $X$  с выполнением условий обращения в нуль в точке орбиты как самого параметра  $f$ , так и радиальной скорости  $\dot{X}$ .

Создан алгоритм и отработана программа решения задачи в общем виде, пригодном для использования в условиях любой планеты с произвольной системой экваториальных препятствий. Сформулировано условие преодоления дискретных препятствий, орбиты которых не расположены в экваториальной плоскости.

В качестве примеров решены задачи о преодолении системы колец и части спутников Урана и Сатурна.

Таким образом, в рамках принятой модели ротора и его движения доказана возможность совершения ротором маневра по преодолению системы экваториальных препятствий. При этом в качестве управляющего воздействия используется сила трения между фрагментами в их относительном движении после разделений ротора. Создана и отработана методика решения задачи в условиях любой планеты с произвольной системой препятствий.

Перспективными представляются исследования следующих вопросов.



I. Учет действия атмосферы планеты. Не изменяя сути разработанного метода, это существенно усложнит решение задачи, поскольку получить решения дифференциальных уравнений движения в конечной форме, возможно, не удастся. Но, с другой стороны, возникает возможность решения задачи о совершении ротором более сложного маневра. Если стартовая позиция ротора находится в экваториальной плоскости, то сначала, за счет аэродинамики вакуумируемой оболочки, совершается маневр в атмосфере с целью вывода ротора из плоскости экватора. Это может быть сделано тем успешнее, чем более плотная и высокая атмосфера, что и имеет место на планетах-гигантах.

В момент выхода из атмосферы ротор будет находиться в некоторой плоскости, параллельной экватору, имея известные скорости и ускорения, которые будут являться начальными для его последующего движения в космосе. Далее совершается маневр уже по обходу препятствий, осуществляемый согласно предложенному в данном исследовании методу. Этот вариант маневрирования ротора требует, конечно, проведения специальных исследований.

В заключение можно сказать, что учет действия атмосферы - в любом случае - будет являться при решении конкретных задач о маневре ротора этапом, предваряющим этап расчета собственно самого маневра по преодолению препятствий.

2. Возможна разработка других вариантов гашения углового движения, отличных от выбранного в данном исследовании с помощью соотношения (6I), в том числе оптимальных в некотором смысле, допустим, в смысле минимума конечного значения радиальной скорости на втором этапе и т.д.

3. Для уменьшения значений сил трения между фрагментами

следует увеличивать ширину заключительного участка движения ротора, где происходит гашение радиального движения, при этом закон изменения управляющего параметра задавать в форме трапеции с определением рациональных ее параметров.

4. В еще большей степени следует ожидать уменьшения значений управляющего параметра  $f(x)$  и силы трения  $F_{тр}$ , если разработать метод одновременного гашения углового и радиального движений ротора в точке орбиты  $X_* = \beta$ . Это оказывается возможным в силу соотношений (19) и (20), откуда следует обращение в нуль  $\dot{\Psi}$  и  $\ddot{\Psi}$  одновременно с  $\dot{X}$  и  $\ddot{X}$ . Здесь, правда, предстоит исследовать условия обращения в нуль в этой же точке и самого угла  $\Psi$ .

5. Возможен также колебательный выход ротора на орбиту с центром колебаний в точке орбиты  $X_*$ , с затуханием колебаний за счет сил трения между фрагментами. В этом случае можно учесть ограничения на величину силы трения, вытекающие из условий практической реализуемости, неразрушения фрикционных элементов и т.д. При этом колебания могут быть двух видов: пространственные, с выходом ротора из плоскости экватора (типа исследованных при свободном движении), и плоские, совершающиеся в плоскости экватора после гашения углового движения. В обоих случаях необходимо выполнить условия, когда не происходит столкновения ротора с экваториальными препятствиями.

6. Актуальной, конечно, является задача углубления и расширения модели ротора за счет учета более широкого спектра его свойств; соответственно этому необходимо уточнять математические модели его движения, создавать методы их анализа и т.д.



## 10. Приложение

В приложении приводится программа для решения задачи о маневрировании ротора ОТС в условиях любой планеты с произвольной системой экваториальных препятствий, имеющей некоторые свободные промежутки.

Используемые в программе обозначения величин:

$R$  - радиус планеты;

$G = g$  - ускорение силы тяжести на экваторе планеты;

$Q = q = \frac{g}{R}$  - полубезразмерная константа;

$M = m$  - погонная масса ротора;

$B = \beta$  - параметр орбиты;

$X = \frac{z}{R}$  - безразмерная радиальная координата ротора;

$XT = \dot{X}$  - полубезразмерная радиальная скорость;

$XT^2 = \dot{X}^2$  - квадрат предыдущей величины;

$V = XT \cdot R$  - радиальная скорость ротора;

$XTT = \ddot{X}$  - полубезразмерное радиальное ускорение;

$W = XTT \cdot R$  - радиальное ускорение ротора;

$T = t$  - время движения ротора;

$P = \psi$  - угол, определяющий положение ротора по отношению к плоскости экватора;

$PT = \dot{\psi}$  - соответствующая угловая скорость;

$PTT = \ddot{\psi}$  - соответствующее угловое ускорение;

$Z = X \cdot R$  - высота ротора над экватором;

$F = f$  - полубезразмерная сила трения между фрагментами;

$FT = F \cdot M \cdot R^2$  - суммарная величина сил трения между фрагментами.

```

0001 PROGRAM OTC
0002 READ (5,*) R,G,M,X0,X2,B,F0,IX
0003 WRITE (6,*) ' R=',R, ' G=',G, ' M=',M, ' X0=',X0,
* ' X2=',X2, ' B=',B, ' F0=',F0, ' IX=',IX
0004 Q=G/R
0005 XTTO=Q*(B-1)
0006 FTTO=-F0*B*XTTO/(B-1)
0007 X1=(5*B+X2-SQRT((5*B-X2)**2-12*B*(X2)))/B
0008 WRITE (6,*) '
* X U W T
* FT* PT PTT Z
0009 X=X0-IX
0010 XT=0.
0011 U=0.
0012 XTT=XTTO
0013 W=XTTO*R
0014 T=0.
0015 F=F0
0016 FT=0.
0017 PTT=FTTO
0018 Z=X0*F0*R
0019 1 X=X+IX
0020 IF (X.GT.X1) X=X1
0022 XT2=Q*(X-1)*(B*(X+1)/X**2-2/X)
0023 XT=SQRT(XT2)
0024 U=XT*R
0025 XTT=Q*(B-X)/X**3
0026 W=XTT*R
0027 T=T+IX/(XT*60.)
0028 F=F0*(B-X)/((B-1)*X)
0029 FT=-F0*B*XT/((B-1)*X**2)
0030 PTT=F0*B*(2*XT**2/X-XTT)/((B-1)*X**2)
0031 Z=X*F*R
0032 WRITE (6,100) X,U,W,T,F,PT,PTT,Z
0033 100 FORMAT (9(2X,E12.5))
0034 IF (X.LT.X1) GOTO 1
0036 10 X1T2=XT**2
0037 X2T2=X1T2+Q/7*(X2-X1)**2*(10*X1-X2)/
* (X1**2*(5*X1-2*X2)**2)
0038 A=F0/(B-1)*(B*(4*X1-X2)-3*X1**2)/(X1**2*(X2-X1)**4)
0039 11 X=X+T
0040 IF (X.GT.X2) X=X2
0042 XT2=X2T2-Q/7*(X2-X)**2*(10*X-3*X2)/(X**2*(5*X-2*X2)**2)
0043 XT=SQRT(XT2)
0044 U=XT*R
0045 XTT=Q/7*(X2-X)*(80*X**2*X2-25*X**3-40*X*X2**2+6*X2**3)/
* (X**3*(5*X-2*X2)**2)
0046 W=XTT*R
0047 T=T+IX/(XT*60)
0048 F=A*(X*(X2-X)**3)
0049 FT=-A*(X2-X)**2*(4*X-X2)*XT
0050 PTT=6*A*(X2-X)*(6*(2*X-X2)*XT**2-(4*X-X2)*(X2-X)*XTT)
0051 Z=X*F*R
0052 F=Q*(B-X)/X**3-XTT

```

```

0053 FT=F**R**2
0054 WRITE (6,100) X,U,W,T,F,PT,PTT,Z,FT
0055 IF (X.LT.X2) GOTO 11
0057 21 C=X2T2/(B-X2)**2+Q/(B*X2**2)
0058 22 X=X+IX
0059 IF (X.GT.B) X=B
0061 XT2=X2T2+Q*(X-X2)*(B*(X+X2)/(X**2*(X2**2)-2/(X*(X2)))-
* C*(X-X2)*(2*(B-X2-X)
0062 XT=0
0063 IF (XT2.GT.0) XT=SQRT(XT2)
0065 U=XT*R
0066 XTT=(B-X)*(Q/X**3-C)
0067 W=XTT*R
0068 IF (XT.GT.0) T=T+IX/(XT*60)
0070 F=C*(B-X)
0071 FT=F**R**2
0072 WRITE (6,100) X,U,W,T,F,PT,PTT,Z,FT
0073 IF (X.LT.B) GOTO 22
0075 STOP
0076 END

```



## Список литературы

1. Н.М.Матвеев. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Росвузиздат, М., 1962, с.291
2. И.М.Рыжик, И.С.Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, М.-Л., 1951, с.464
3. Наука и человечество, 1982. "Знание", М., 1982, с.400
4. Наука и человечество, 1988. "Знание", М., 1988, с.400
5. БСЭ, т.27, 3-е изд., "Советская Энциклопедия", М., 1977, с.623
6. БСЭ, т.22, 3-е изд., "Советская Энциклопедия", М., 1975, с.627
7. Ф.Ю.Зигель. Путешествие по недрам планет. "Недра", М., 1988, с.217