

21/ОТС | Соловцов И.П.

Математическое моделирование динамики и изучение вопросов устойчивости общепланетного транспортного средства

ПАПКА  
БУМАГА



24/050

**Ц Е Н Т Р**  
**«ЗВЕЗДНЫЙ МИР»**

**г. Гомель**

Тип. БелИИЖТа, г. Гомель. Зак. 4347—500. 15.11.88 г.



# ГЛАВА I.

## Динамика аксиально-симметричного движения обцепланетного транспортного средства.

### I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем разделе исследуется динамика движения обцепланетного транспортного средства (ОТС). Изучение проводится на основе упрощенной модели. Предполагается, что ОТС состоит из массивной оболочки, имеющей форму замкнутой трубы, опоясывающей Земной шар, и вращающихся внутри нее одного или нескольких кольцеобразных роторов, имеющих в общем случае различные массы. (см.рис. I ). Роторы могут скользить относительно оболочки без трения со скоростями различными как по величине так и по направлению. Предполагается также отсутствие фрикционного взаимодействия между роторами. Поперечные размеры трубы и роторов считаются пренебрежимо малыми по сравнению с длиной окружности кольца. Линейная плотность массы роторов и оболочки постоянна вдоль кольца. Оболочка и роторы допускают упругое растяжение вдоль окружности.

Предполагается, что до начала движения оболочка удерживается на поверхности Земли, а после разгона роторов до определенных скоростей отпускается. Далее в процессе движения ОТС не получает энергии извне.

Очевидно, что рассматриваемая система из-за малости поперечных размеров является достаточно гибкой. Однако мы здесь не будем касаться вопросов устойчивости относительно изменений формы ОТС. Будем считать, что симметрия начальных условий движения и взаимодействия с Землей такова, что в процессе движение ОТС сохраняет идеальную форму кольца переменного радиуса. Плоскость кольца может перемещаться только поступательно перпендикулярно оси проходящей через центр Земли и центр кольца.

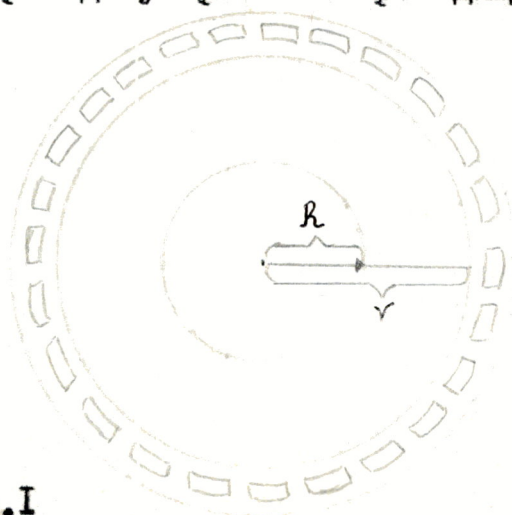


Рис. I



План изложения следующий. В п. I.2 на основе принципа наименьшего действия Гамильтона получено уравнение движения ОТС с одним ротором при запуске с экватора в предположении, что ротор и оболочка допускают упругие деформации подчиняющиеся закону Гука. В п. I.3 детально исследован случай абсолютно неупругих оболочки и ротора. Получены аналитические решения уравнения движения и изучены закономерности движения. В п. I.4 обсуждается уравнение движения ОТС с одним ротором с учётом силы сопротивления атмосферы при наличии произвольной упругой силы. В п. I.5. получена система уравнений, описывающих движение ОТС при подъёме с заданной широты. В п. I.6. рассмотрена ОТС с произвольным числом роторов. Из принципа наименьшего действия получено уравнение её движения при подъёме с экватора. В п. I.7. предложен метод расчёта режима вывода полезного груза на круговую орбиту вокруг Земли при подъёме ОТС с экватора.

## 2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОТС С ОДНИМ РОТОРОМ.

---

Рассмотрим сначала движение ОТС с одним ротором внутри оболочки. Для вывода уравнений движения воспользуемся принципом наименьшего действия Гамильтона. Рассматриваемая система характеризуется двумя степенями свободы. Её положение полностью определяется двумя обобщенными координатами - радиусом кольца  $r$  (равным расстоянию от центра Земли до ротора) и углом  $\psi$  поворота ротора относительно оболочки. Функция Лагранжа равна разности кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергии системы

$$\mathcal{L} = T - U \quad (I.1)$$

Кинетическая энергия системы определяется выражением

$$T = \frac{\mu r^2 \dot{\psi}^2}{2} + \frac{\mu + m}{2} \dot{r}^2 \quad (I.2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени,  $\mu$  и  $m$  - соответственно массы ротора и оболочки. Первое слагаемое, в правой части (2), равно кинетической энергии вращения ротора, а второе - представляет собой суммарную кинетическую энергию радиального движения ротора и оболочки.

Потенциальная энергия складывается из энергии гравитационного взаимодействия ОТС с Землей и энергии упругих деформаций ОТС.



$$V = -\gamma \frac{M(m+\mu)}{r} + \frac{1}{2} \frac{E+\varepsilon}{R} (r-R)^2 \quad (1.3)$$

Здесь  $M$  - масса Земли,  $\gamma$  - гравитационная постоянная. Последнее слагаемое в правой части формулы (1.3), соответствующее энергии упругого растяжения оболочки и ротора предполагает справедливость закона Гука\*. Числовые коэффициенты  $E$  и  $\varepsilon$ , характеризующие упругие свойства оболочки и ротора, соответственно связаны с их моделями Юнга  $\tilde{E}$  и  $\tilde{\varepsilon}$  соотношениями

$$E = 2\pi \tilde{E} S_{об.}; \quad \varepsilon = 2\pi \tilde{\varepsilon} S_{рот.}$$

Здесь  $S_{об.}$  и  $S_{рот.}$  - площади поперечного сечения оболочки и ротора соответственно. Система уравнений движения получается из следующих уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \quad (1.5)$$

Дифференцируя (1.1) с учётом (1.2) и (1.3) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= \mu r \dot{\varphi}^2 - \gamma \frac{M(m+\mu)}{r^2} - E \left( \frac{r}{R} - 1 \right), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= (m + \mu) \dot{r}, \end{aligned}$$

что после подстановки в (1.4) даёт

$$(m + \mu) \ddot{r} = \mu r \dot{\varphi}^2 - \gamma \frac{M(m+\mu)}{r^2} - E \left( \frac{r}{R} - 1 \right) \quad (1.6)$$

\* Для численных расчётов будет использована более точная зависимость величины упругой силы от относительного удлинения, учитывающая наличие поперечных деформаций (см. приложение I).



Функция Лагранжа (I.1) не зависит явно от  $\psi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0,$$

то есть  $\psi$  является циклической координатой. Учитывая также, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \mu r^2 \dot{\psi}$$

из (I.5) получаем закон сохранения момента количества движения ротора

$$\frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\psi}) = 0 \quad (I.7)$$

или

$$\mu r^2 \dot{\psi} = L_0 = \text{const} \quad (I.8)$$

где

$$L_0 = \mu U_0 R \quad (I.9)$$

начальный момент количества движения ротора,  $U_0$  - начальная линейная скорость ротора (у поверхности Земли). Из (I.8) и (I.9) находим

$$\dot{\psi} = \frac{L_0}{\mu r^2} = \frac{U_0 R}{r^2} \quad (I.10)$$

Подставляя (10) в (6) получаем уравнение описывающее изменение радиуса ОТС

$$(m + \mu) \ddot{r} = \frac{\mu U_0^2 R^2}{r^3} - \frac{\gamma \mu (m + \mu)}{r^3} - (E + G) \left( \frac{r}{R} - 1 \right) \quad (I.11)$$

Уравнение (I.11) имеет вид уравнения Ньютона для одномерного движения частицы массы  $m + \mu$ . Второе и третье слагаемые в правой части представляют собой скалярные суммы соответственно гравитационных и упругих сил действующих на ОТС в радиальном направлении. Первое слагаемое даёт скалярную сумму центробежных сил обусловленных вращением ротора.

Вводя скорость изменения радиуса ОТС



$$v = \dot{r}$$

(I.12)

и учитывая, что

$$\ddot{r} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} v^2$$

преобразуем уравнение (I.11) к виду

$$\frac{d}{dr} v^2 = \frac{R^2 v_0^2}{(m + \mu) r^3} - \gamma M \frac{1}{r^2} - E \left( \frac{r}{R} - 1 \right)$$

Выполняя интегрирование по  $r$  получаем

$$v^2 = - \frac{\mu R^2 v_0^2}{(m + \mu) r^2} + \frac{2\gamma M}{r} - \frac{E(r - R)^2}{(m + \mu) R} + C \quad (I.13)$$

Из начального условия  $v = 0$  при  $r = 0$  находим значение постоянной  $C$

$$C = \frac{\mu v_0^2}{m + \mu} - \frac{2\gamma M}{R} \quad (I.14)$$

С учётом (I.14) уравнение (I.13) приобретает вид

$$v^2 = 2\gamma M \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\mu R^2 v_0^2}{m + \mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{E(r - R)^2}{(m + \mu) R}$$

Отсюда учитывая (I.12) получаем

$$\dot{r} = \sqrt{2\gamma M \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\mu R^2 v_0^2}{m + \mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{E(r - R)^2}{(m + \mu) R}} \quad (I.15)$$

Принимая во внимание, что при  $t = 0$ ,  $r = R$  получаем интеграл уравнения (I.15) определяющий в неявном виде зависимость расстояния от ОТС до центра Земли, как функцию времени

$$t = \int_R^r \frac{dr}{\sqrt{2\gamma M \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{\mu R^2 v_0^2}{m + \mu} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{E(r - R)^2}{(m + \mu) R}}} \quad (I.16)$$



### 3. ДВИЖЕНИЕ ОТС В СЛУЧАЕ АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИХ ОБОЛОЧКИ И РОТОРА

Проанализируем подробно движение ОТС в частном случае абсолютно неупругих оболочки и ротора ( $E = 0$ ). Тогда равенства (I.15), (I.16) принимают вид

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2R}{m+\mu} \left[ RT_0 \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + U_0 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]} \quad (I.17)$$

$$t = \int_R^r \frac{1}{\sqrt{\frac{2R}{m+\mu} \left[ RT_0 \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) + U_0 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]}} dr \quad (I.18)$$

где  $T_0 = \frac{\mu U_0^2}{2}$ ;  $U_0 = \frac{\gamma M (m + \mu)}{R}$

соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы в начале движения. Радиальная скорость (I.17) обращается в нуль при значениях  $r$  равных

$$r_{min} = R \quad \text{и} \quad r_{max} = R \frac{T_0}{W} \quad (I.19)$$

где

$$W = U_0 + T_0 \quad (I.20)$$

- полная энергия системы. Равенство нулю  $\dot{r}$  соответствует точкам поворота, в которых функция  $r(t)$  переходит от увеличения к уменьшению и наоборот. Если полная энергия системы отрицательна  $W < 0$ , то движение ОТС финитно и совершается в пределах

$$r_{min} < r < r_{max}$$

Если же  $W > 0$ , то значения  $r$  ограничены только снизу  $r > R$  и движение инфинитно. В рассматриваемом пределе  $E = 0$ ,  $\xi = 0$ , движение подчиняется уравнению Ньютона для частицы массы  $m + \mu$  в поле эффективной потенциальной энергии

$$U_{эфф} = \frac{\mu U_0^2 R^2}{2 r^2} - \frac{\gamma M (m + \mu)}{r} = T_0 R^2 \frac{1}{r^2} - U_0 R \frac{1}{r} \quad (I.21)$$



Рисунок 2, на котором схематически изображена зависимость  $V$  эфф. от  $\gamma$ , хорошо иллюстрирует финитность и инфинитность движения в зависимости от знака полной энергии системы  $W$

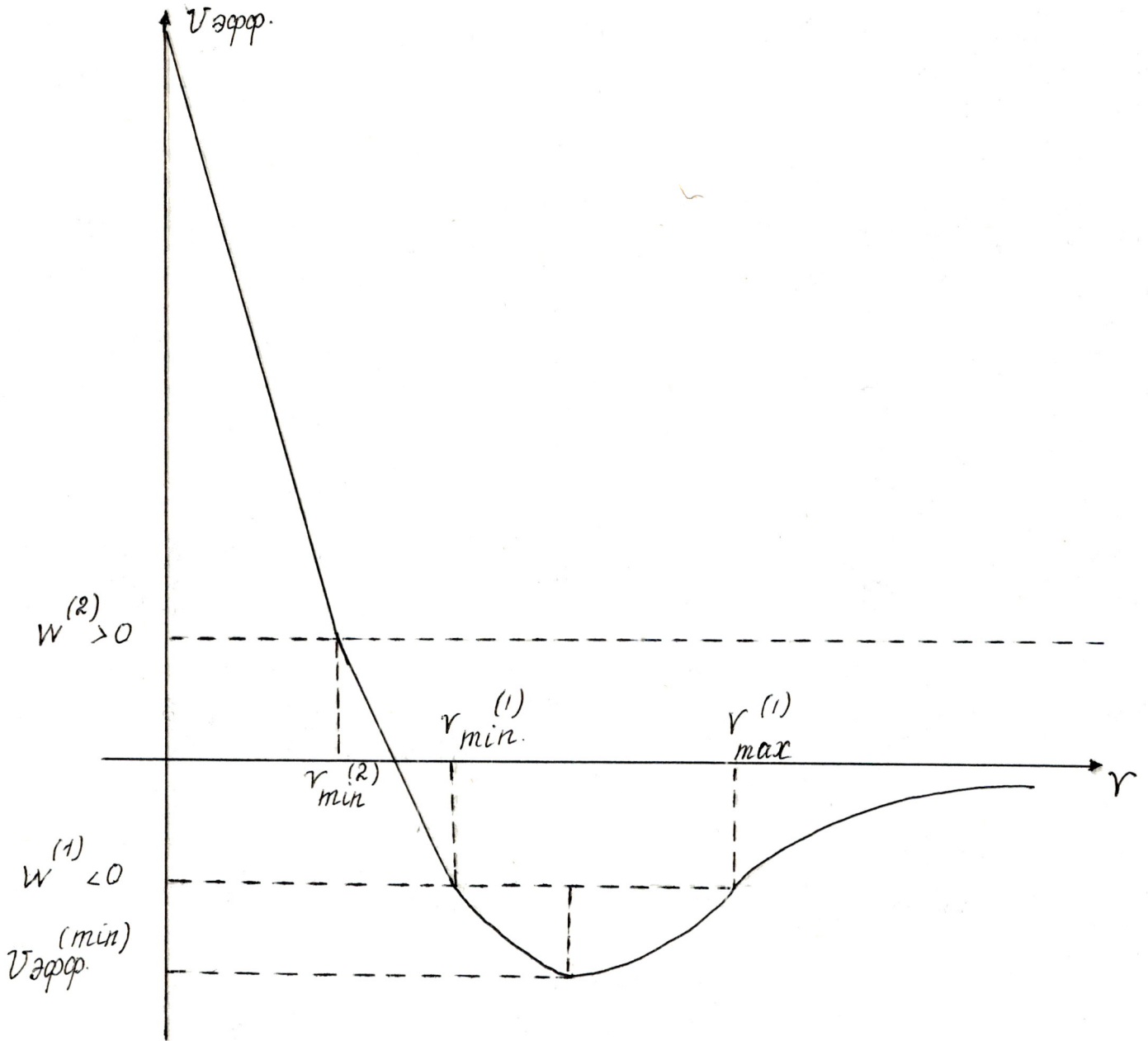


Рис. 2

Зависимость  $V$  эфф. ( $\gamma$ ) при  $\gamma \rightarrow 0$  обращается в  $+\infty$ , а при  $\gamma \rightarrow \infty$  стремится к нулю со стороны отрицательных значений. При

$$\gamma = \frac{2 T_0}{U_0} R \quad (I.22)$$



эта зависимость имеет минимум

$$U_{\text{эфф.}}^{(\text{min})} = -\frac{U_0^2}{4T_0}$$

При  $w < U_{\text{эфф.}}^{(\text{min})}$ , что согласно (I.20) равносильно неравенству  $T_0 < -U_0/2$

$$\text{или } U_0 < U_{\text{min}} = \sqrt{\frac{\gamma M (m + M)}{\mu R}} \quad (\text{I.23})$$

подъём ОТС невозможен. Заметим, что неравенство (I.23) означает преобладание гравитационной силы над центробежной в момент старта у поверхности Земли, при  $r = R$  (см. первое и второе слагаемые в правой части формулы (I.II)). Отметим также, что условие наличия начальной подъёмной силы  $U_0 > U_{\text{min}}$ , где  $U_{\text{min}}$  определяется согласно (I.23) справедливо не только в рассматриваемом абсолютно неупругом случае, но и при учёте силы упругости и силы сопротивления атмосферы, так как в начальный момент времени эти силы отсутствуют. Выполним интегрирование в правой части уравнения (I.I8). Рассмотрим сначала случай финитного движения ( $w < 0$ ). В этом случае интеграл (I.I8) преобразуется к виду

$$t = \sqrt{\frac{m + M}{2|w|}} \int_R^r \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 - \frac{R U_0}{|w|} r + \frac{R^2 T_0}{|w|}}}$$

или

$$t = \sqrt{\frac{m + M}{2|w|}} \int_R^r \frac{r dr}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - (r - \alpha)^2}}$$

(I.24)

где введены обозначения

$$\alpha = -\frac{R U_0}{2|w|}$$

(I.25)

$$\beta = \frac{w + T_0}{U_0}$$

(I.26)



Вводя в (I.24) замену переменной интегрирования

$$r = \alpha (1 - \beta \cos z) \quad (I.27)$$

получаем

$$t = \sqrt{\frac{m + \mu}{2|\omega|}} \int_R^r \alpha (1 - \beta \cos z) dz,$$

что после выполнения интегрирования даёт

$$t = \sqrt{\frac{m + \mu}{2|\omega|}} \alpha (z - \beta \sin z) + C_1 \quad (I.28)$$

где значение постоянной

$$C_1 = -\sqrt{\frac{m + \mu}{2|\omega|}} \alpha \left[ \arccos \frac{\alpha - R}{\alpha \beta} + \beta \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha - R}{\alpha \beta} \right)^2} \right] \quad (I.29)$$

таково, что при  $t = 0$ ,  $r = R$  (в начальный момент времени  $t = 0$  система находится у поверхности Земли). Формулы (I.27) - (I.29) определяют параметрическое представление зависимости  $r$  от  $t$ . Они показывают, что эта зависимость носит периодический характер. Наименьшее и наибольшее значения  $r$  согласно (I.27) достигаются при  $z = (2k + 1)\pi$  и  $2k\pi$  соответственно ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) и равны

$$\alpha (1 - \beta) = R, \quad (I.30)$$

$$\alpha (1 + \beta) = R \frac{T_0}{\omega} \quad (I.31)$$

что находится в согласии с (I.19). Период колебаний может быть найден из (I.28) путём вычисления разности времен при значениях параметра  $z$  отличающихся на  $2\pi$

$$T = \sqrt{\frac{m + \mu}{2|\omega|}} \alpha \cdot 2\pi = 2\pi \gamma M \left( \frac{m + \mu}{2|\omega|} \right)^{3/2}$$



Аналогичные рассуждения в случае  $W < 0$  приводят к следующим параметрическим уравнениям, описывающим инфинитное движение.

$$r = \alpha (\beta \operatorname{ch} z - 1)$$

$$t = \sqrt{\frac{m + \mu}{2W}} \alpha (\beta \operatorname{sh} z - z) + C_2$$

где

$$C_2 = -\sqrt{\frac{m + \mu}{2W}} \alpha \left[ \operatorname{Arch} \frac{\alpha - R}{\alpha \beta} + \beta \sqrt{1 + \left( \frac{\alpha - R}{\alpha \beta} \right)^2} \right]$$

В этом случае  $r$  зависит от  $t$  монотонно и при  $t \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow \infty$ .

#### 1.4. УЧЁТ СИЛ УПРУГОСТИ И АТМОСФЕРНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Учёт в уравнении движения (I.11) последнего слагаемого отвечающего упругой силе приведет к эффективной потенциальной энергии квадратично растущей с ростом  $r$

$$U_{\text{эфф.}} = \frac{\mu \omega_0^2 R^2}{2r^2} - \frac{\gamma M (m + \mu)}{\gamma} + \frac{1}{2} \frac{E + \varepsilon}{R} (r - R)^2 \quad (\text{I.32})$$

В результате движение будет финитно при любой полной энергии  $W$ . Получение аналитической зависимости  $r$  от  $t$  в этом случае приводит к вычислению интеграла (I.16). Эта задача может быть решена численно. Однако и без вычислений видно, что в этом случае движение ОТС будет во многом аналогично движению абсолютно неупругого кольца при  $W < 0$ . Оно будет носить периодический характер. Колебания будут совершаться в пределах от  $r_{\text{min.}} = R$  до  $r_{\text{max}}$ . Причём, с ростом начальной кинетической энергии ротора, точка поворота  $r_{\text{max}}$  будет смещаться в сторону больших  $r$ , а амплитуда колебаний будет возрастать. Увеличение массы оболочки приведёт к смещению  $r_{\text{max}}$  в сторону малых  $r$  и к уменьшению амплитуды колебаний ОТС. Учёт силы атмосферного сопротивления (см. приложение 2) приведёт еще к одному слагаемому в правой части (I.11) и уравнение движения приобретет вид



$$(m + \mu) \ddot{Y} = \frac{\mu u_0^2 R^2}{\gamma^3} - \frac{\gamma M(m + \mu)}{r^2} + F_{\text{внутр}} + F_{\text{атм}} \quad (I.33)$$

Здесь  $F_{\text{внутр}}$  и  $F_{\text{сопр}}$  соответственно силы упругости и атмосферного сопротивления просуммированные скалярно по всей длине окружности колец. Вид выражений для этих сил обсуждается в приложениях I и 2. Отметим также, что наличие телескопических соединений в системе и их раздвижение в процессе подъёма приведёт к усложнению вида члена  $F_{\text{внутр}}$ . Детальное изучение поведения системы, описываемой уравнением (I.33) возможно на основе численных расчётов на ЭВМ.

### I.5. ПОДЪЁМ С ЗАДАННОЙ ШИРОТЫ

Рассмотрим более общий случай движения, когда в момент старта ОТС находится не на экваторе, как предполагалось раньше, а располагается на другой окружности, лежащей на Земной поверхности (например, на параллели, соответствующей заданной широте). При этом радиус ОТС в начальный момент движения меньше, чем радиус Земли. В этом случае задача не является аксиально-симметричной (см. рис. 3). Действительно, в произвольный момент движения сила гравитационного взаимодействия с Землёй, действующая на элемент кольца ОТС, направлена не к центру симметрии ОТС, а к центру Земли. Центробежная же сила, действующая на элемент кольца, лежит в плоскости ОТС и направлена к центру кольца. Вдоль радиуса кольца направлены также равнодействующие сил упругости и сил внутреннего трения, действующих на элемент ОТС. Сила атмосферного сопротивления в любой момент движения направлена противоположно скорости. В результате суммарная сила, действующая на элемент кольца, будет непрерывно меняться по величине и направлению.

Трёхмерное уравнение движения элемента оболочки ОТС имеет вид

$$(dm + d\mu) \ddot{\vec{v}} = d\vec{F}_{\text{цб}} - d\vec{F}_{\text{гр}} - d\vec{F}_{\text{внутр}} + d\vec{F}_{\text{атм}} \quad (I.34)$$

где введены следующие обозначения:

$d\vec{F}_{\text{цб}}$  - центробежная сила вращения ротора

$d\vec{F}_{\text{гр}}$  - сила гравитационного взаимодействия с Землёй.







Разлагая каждую из сил в правой части (I.34) на две составляющих

$$d\vec{F}_i = d\vec{F}_i^{(p)} + d\vec{F}_i^{(z)},$$

вдоль радиуса кольца  $\rho$  и вдоль оси  $Z$ , проходящей через центр кольца ОТС и через центр Земли, вместо (I.34) получим систему из двух скалярных уравнений

$$\begin{cases} (dm + d\mu) \frac{d^2 \rho}{dt^2} = dF_{\text{цб.}}^{(p)} - dF_{z\rho}^{(p)} + dF_{bn}^{(p)} + dF_{\text{упр.}}^{(p)} + dF_{\text{атм.}}^{(p)} \\ (dm + d\mu) \frac{d^2 z}{dt^2} = dF_{z\rho}^{(z)} + dF_{\text{атм.}}^{(z)} \end{cases}$$

Откуда после суммирования по всему кольцу имеем:

$$\begin{cases} (m + \mu) \ddot{\rho} = F_{\text{цб.}}^{(p)} + F_{z\rho}^{(p)} + F_{bn}^{(p)} + F_{\text{упр.}}^{(p)} + F_{\text{атм.}}^{(p)} \\ (m + \mu) \ddot{z} = F_{z\rho}^{(z)} + F_{\text{атм.}}^{(z)} \end{cases}$$

где справа  $F_i^{(p)}$  и  $F_i^{(z)}$  - скалярные суммы по кольцу от проекций соответствующих сил.

Вклад центробежных сил

$$F_{\text{цб.}}^{(p)} = \frac{\int \mu \rho_0 \omega^2}{\rho^3}$$

Вклад гравитационного взаимодействия с Землей

$$F_{z\rho}^{(p)} = F_{z\rho} \cos \alpha, \quad F_{z\rho}^{(z)} = F_{z\rho} \sin \alpha$$

где  $F_{z\rho} = -\gamma \frac{M(m + \mu)}{r^2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\rho}{r}$ ,  $\sin \alpha = \frac{z}{r}$ ,  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

Составляющие сил атмосферного сопротивления

$$F_{\text{атм.}}^{(p)} = F_{\text{атм.}}^{(p)} \cos \varphi, \quad F_{\text{атм.}}^{(z)} = F_{\text{атм.}}^{(p)} \sin \varphi$$



$$rge \quad F_{атм} = \alpha v^2 e^{-\beta(v-R)}$$

$$\cos \varphi = \frac{\dot{\rho}}{v}, \quad \sin \varphi = \frac{\dot{z}}{v}, \quad v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2}$$

Слагаемое  $F_{вн}^{(\rho)}$ , обусловленное внутренними силами ротора и оболочки может иметь различный вид в зависимости от режима раздвижения телескопических соединений. В случае, когда раздвижения отсутствует, она сводится к упругой силе

$$F_{вн}^{(\rho)} = - \frac{E + \varepsilon}{\rho_0} (\rho - \rho_0)$$

где

$$\rho_0 = R \cdot \cos \alpha_0,$$

$\alpha_0$  - угол, определяющий широту с которой производится запуск ОТС.

С учётом приведенных здесь сил система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} (m + \mu) \ddot{\rho} = \mu \omega_0^2 R \cos \alpha_0 \frac{1}{\rho^3} - \gamma M (m + \mu) \frac{\rho}{r^3} - \alpha \dot{\rho} v e^{-\beta(v-R)} - \\ - \frac{E + \varepsilon}{R} (\rho - R \cos \alpha_0), \\ (m + \mu) \ddot{z} = - \gamma (M + \mu) \frac{z}{r^3} - \alpha \dot{z} v e^{-\beta(v-R)} \end{cases} \quad (I.35)$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}; \quad v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2}$$

где

Движение системы, описываемой уравнениями (I.35), сведётся к накладывающимся друг на друга колебаниям по  $\rho$  и по  $z$ .



## 6. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОТС С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ РОТОРОВ

Вывод уравнений движения при наличии нескольких роторов аналогичен приведенному в п. I для случая одного ротора, заключенного в оболочку. Кинетическая энергия системы состоящей из оболочки массы  $m$  и  $N$  роторов, имеющих массы  $M_i$  и вращающихся с угловыми скоростями  $\dot{\varphi}_i$  определяется выражением

$$T = \frac{1}{2} \dot{r}^2 \sum_{i=1}^N M_i \dot{\varphi}_i^2 + \frac{m + \sum M_i}{2} \dot{r}^2 \quad (I.37)$$

Потенциальная энергия системы

$$V = -\gamma \frac{M \left( m + \sum_{i=1}^N M_i \right)}{r} + \frac{1}{2} \frac{E + \sum_{i=1}^N \epsilon_i}{R} \quad (I.38)$$

где  $\epsilon_i$  - коэффициент, характеризующий упругие свойства  $i$ -го ротора (см. п. 2). Функция Лагранжа системы согласно (I.1) определится как разность (I.37) и (I.38). Её производные по обобщенным координатам  $r, \varphi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) и соответствующим им обобщенным скоростям  $\dot{r}$  и  $\dot{\varphi}_i$  имеют следующий вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \dot{r} \sum_{i=1}^N M_i \dot{\varphi}_i^2 - \gamma \frac{M(m + \sum M_i)}{r^2} - \left( E + \sum_{i=1}^N \epsilon_i \right) \left( \frac{\dot{r}}{R} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \left( m + \sum_{i=1}^N M_i \right) \dot{r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} = r^2 M_i \dot{\varphi}_i$$

Система уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

приводит к следующим уравнениям движения

$$m + \sum_{i=1}^N \mu_i \ddot{r} = r \sum_{i=1}^N \mu_i \dot{\varphi}_i^2 - \gamma \frac{M(m + \sum_{i=1}^N \mu_i)}{r^2} - \left( E + \sum_{i=1}^N G_i \right) \left( \frac{r}{R} - 1 \right)$$

(I.39)

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \sum_{i=1}^N \mu_i \dot{\varphi}_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

(I.40)

Уравнения (I.40) дают законы сохранения момента количества движения для каждого ротора

$$r^2 \mu_i \dot{\varphi}_i = L_0^{(i)} = \text{const}$$

(I.41)

где

$$L_0^{(i)} = \mu_i \mathcal{U}_0^{(i)} R$$

(I.42)

- начальный момент количества движения  $i$ -го ротора.

$\mathcal{U}_i$  - скорость  $i$ -го ротора в начале движения. Исключая  $\varphi_i$  из (I.39) с помощью (I.41) и (I.42) получаем уравнение движения ОТС с произвольным числом роторов

$$\left( m + \sum_{i=1}^N \mu_i \right) \ddot{r} = \frac{2R^2 T_0}{r^3} - \gamma \frac{M(m + \sum_{i=1}^N \mu_i)}{r^2} - \left( E + \sum_{i=1}^N G_i \right) \left( \frac{r}{R} - 1 \right)$$

(I.43)

где

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{U}_0^2$$

(I.44)



- начальная кинетическая энергия роторов. В отсутствие силы упругости  $E = \mathcal{E}_1 = \dots = \mathcal{E}_N = 0$  уравнение (I.43) допускает аналитическое решение в параметрической форме по виду совпадающее с (I.24), (I.25), где

$$\alpha = -\frac{R U_0}{2|W|}, \quad \beta = \frac{W + T_0}{U_0} \quad (I.45)$$

$$U_0 = -\frac{\gamma M (m + \sum_{i=1}^N M_i)}{R} \quad (I.46)$$

постоянная  $C$  определяется выражением (I.29), а полная энергия системы  $W = T_0 + U_0$ . (I.47)

В общем случае уравнение движения ОТС с несколькими роторами имеет вид

$$\left(m + \sum_{i=1}^N M_i\right) \ddot{r} = \frac{2R^2 T_0}{r^3} - \gamma \frac{M (m + \sum_{i=1}^N M_i)}{r^2} + F_{\text{внутр.}} + F_{\text{атм.}} \quad (I.48)$$

где  $F_{\text{внутр.}}$  и  $F_{\text{атм.}}$  - скалярные суммы по кольцу от внутренних сил и сил сопротивления атмосферы. Заметим, что начальные скорости роторов входят в (I.48) только через  $T_0$  (см. I.44). Следовательно, характер движения не зависит от величины и направления вращения отдельных роторов и определяется их суммарной начальной кинетической энергией.

## 7. ПЛАВНЫЙ ВЫХОД НА ОРБИТУ

---

Как было показано выше, в общем случае движение ОТС носит характер осцилляций. Радиус кольца периодически изменяется в пределах от  $r_{\text{max}}$  до  $r_{\text{min}}$ . Пульсирующий характер движения кольца затрудняет его использование как транспортного средства, когда весь полезный груз желательно вывести на одну круговую орбиту. Сопротивление атмосферы способствует уменьшению осцилляций. Однако влияние атмосферы ощутимо только при движении вблизи поверхности Земли и как показывают простые оценки не приводит к значительному затуханию колебаний. Существует однако возможность гашения колебаний за счёт подбора закона возвращающей внутренней силы, чередуя соответствующим образом периоды уп-

ругого расширения конца с выдвиганием телескопических соединений.

Производя разрыв ротора, который может являться носителем полезного груза в заданной точке траектории можно добиться выведения всех его элементов на заданную круговую орбиту.

Продемонстрируем идею метода на простом примере. Предположим, что атмосфера отсутствует и ротор массы  $M$ , раскрученный у поверхности Земли до начальной скорости  $U_0$  движется далее без оболочки. Требуется чтобы после разрыва ротора, его составляющие оказались на круговой орбите заданной высоты. Покажем, что этого можно добиться выбирая надлежащим образом коэффициент  $\xi$ , характеризующий упругие свойства ротора и задавая предельную допустимую величину силы его натяжения при которой наступает разрыв. Изменение радиуса ротора подчиняется уравнению

$$M\ddot{r} = F_{цс} + F_{zp} + F_{упр}. \quad (I.49)$$

где

$$F_{цс} = \frac{M R^2 U_0^2}{r^3} \quad (I.50)$$

$$F_{zp} = -\gamma \frac{M M}{r^2} \quad (I.51)$$

$$F_{упр} = -\frac{\xi}{R} (v - R) \quad (I.52)$$

Уравнение (I.49) по форме совпадает с уравнением Ньютона для одновременного движения частицы массы  $M$  под действием сил, стоящих в его правой части.

Высота круговой орбиты частей ротора после разрыва определится из условия

$$F_{цс} = F_{zp}.$$

что даёт

$$r_0 = \frac{R^2 v_0^2}{\gamma M} \quad (I.53)$$

Чтобы груз остался на орбите такой высоты, необходимо чтобы в момент разрыва ротор имел нулевую радиальную скорость. Это может быть обеспечено равенством нулю работы совершаемой суммой сил (I.50) - (I.52)



при перемещении от  $R$  до  $r_0$

$$\int_R^{r_0} (F_{y_0} + F_{zp} + F_{yup}) dr = 0 \quad (I.54)$$

Вычисляя интегралы от каждого из слагаемых учитывая (I.50)-(I.52) находим

$$\int_R^{r_0} F_{y_0} dr = -2\mu R^2 \omega_0^2 \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \quad (I.55)$$

$$\int_R^{r_0} F_{zp} dr = \gamma M \mu \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{R} \right) \quad (I.56)$$

$$\int_R^{r_0} F_{yup} dr = -\frac{\sigma}{2R} (r_0 - R)^2 \quad (I.57)$$

Приравнивая согласно (I.54) сумму правых частей формул (I.55)-(I.57) получаем уравнение для  $\sigma$ , из которого находим

$$\sigma = \frac{2\gamma M \mu R}{(r_0 - R)^2} \left[ \frac{r_0}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) - \frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} \right] \quad (I.58)$$

Предельное значение силы тангенциального натяжения ротора  $T_{пр.}$  определится условием

$$T_{пр.} = 2R |F_{yup}|_{r=r_0} = \frac{\sigma}{R} (r_0 - R) \quad (I.59)$$

Таким образом, для вывода груза находящегося на роторе на круговую орбиту радиуса  $r$  можно задать коэффициент  $\sigma$  характеризующий упругие свойства ротора равным величине, определяемой формулой (58), разогнать ротор у поверхности Земли до скорости

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\gamma M r_0}}{R} \quad (I.60)$$

(см. (I.53)) и обеспечить единовременный разрыв ротора на части при достижении силой его тангенциального натяжения значения  $\Gamma_{пр.}$  определяемого формулой (I.59).

Рассмотрим теперь более близкую к реальности задачу, учитывающую влияние атмосферы, наличие оболочки и телескопических соединений у ротора. Будем придерживаться следующей последовательности чередования режимов движения при подъёме. У поверхности Земли ротор разгоняется до скорости  $\omega_0$  определяемой выражением (60). На высоте  $r = r_1$  находящейся за пределами влияния атмосферы происходит сброс оболочки, затем на высоте  $r = r_2$  начинается раздвижение телескопических соединений ротора при постоянной силе его натяжения. При  $r = r_3$  выдвигание телескопических соединений прекращается и далее происходит дополнительное упругое растяжение ротора. При  $r = r_0$  ротор рвётся и составляющие его элементы остаются на круговой орбите радиуса  $r_0$ . Массы и упругие свойства ротора и оболочки считаются заданными и выход в положение  $r = r_0$  с нулевой радиальной скоростью обеспечивается надлежащим выбором одного из положений смены режимов. Например,  $r_2$  при фиксированных значениях  $r_1$  и  $r_3$

В данном случае процесс подъёма от поверхности Земли до момента сброса оболочки описывается уравнением

$$(m + \mu) \ddot{r} = F_{ц.б.} + F_{гр.} + F_{атм.} + F_{вп.об.} + F_{вп.рот.} \quad (I.61)$$

После сброса радиальное движение ротора подчиняется уравнению

$$\mu \ddot{r} = F_{ц.б.} + F_{гр.рот.} + F_{вп.рот.} \quad (I.62)$$

Слагаемые в правых частях уравнений (I.61) и (I.62) имеют следующий вид

$$F_{ц.б.} = \frac{\mu R^2 \omega_0^2}{r^3} \quad (I.63)$$

$$F_{гр.} = - \gamma \frac{\mu (m + \mu)}{r^2} \quad (I.64)$$

$$F_{гр.рот.} = - \gamma \frac{\mu \mu}{r^2} \quad (I.65)$$

$$F_{вп.об.} = \begin{cases} \frac{E}{R} (r - R) & \text{при } R < r < r_2 \\ 0 & \text{при } r > r_2 \end{cases} \quad (I.66)$$



$$F_{\text{вп.рот.}} = \begin{cases} \frac{\mathcal{E}}{R} (\gamma - R) & \text{при } R < r < r_2 \\ \frac{\mathcal{E}}{R} (r_2 - R) & \text{при } r_2 < r < r_3 \\ \frac{\mathcal{E}}{R_1} (\gamma - R_1) & \text{при } r_3 < r < r_0 \\ 0 & \text{при } r \geq r_0 \end{cases} \quad (\text{I.67})$$

Величина  $R_I$  определяется из условия непрерывности  $F_{\text{вп.рот.}}$

при  $r = r_3$

$$R_I = R \frac{r_3}{r_1}$$

Кинетическая энергия радиального движения приобретаемая оболочкой и ротором к моменту сброса оболочки определяется интегралом

$$\frac{(m + \mu)v^2}{2} = \int_R^{r_1} (F_{\text{м.б.}} + F_{\text{гр.}} + F_{\text{атм.}} + F_{\text{вп.об.}} + F_{\text{вп.рот.}}) dr \quad (\text{I.68})$$

Чтобы в момент разрыва при  $r = r_0$ , радиальная скорость ротора была равна нулю, кинетическая энергия его радиального движения, приобретенная к моменту сброса оболочки, должна быть полностью израсходована на пути от  $r_I$  до  $r_0$ . Следовательно,

$$\frac{\mu v^2}{2} = \int_{r_1}^{r_0} (F_{\text{м.б.}} + F_{\text{гр.рот.}} + F_{\text{вп.рот.}}) dr \quad (\text{I.69})$$

Исключая радиальную скорость  $v$  в момент сброса оболочки из формул (I.68) и (I.69) получаем

$$\begin{aligned} \frac{I}{m + \mu} \int_R^{r_1} (F_{\text{м.б.}} + F_{\text{гр.}} + F_{\text{атм.}} + F_{\text{вп.об.}} + F_{\text{вп.рот.}}) dr = \\ = \frac{I}{\mu} \int_{r_1}^{r_0} (F_{\text{м.б.}} + F_{\text{гр.рот.}} + F_{\text{вп.рот.}}) dr \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование с использованием выражений (I.61) - (I.62) получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+\mu} \left[ \frac{\mu R^2 u_0^2}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - \gamma M (\mu + m) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) - W_{\text{атм.}} - \frac{(\mathcal{E} + E)(r - R)^2}{2R} \right] \\ & = \frac{1}{\mu} \left\{ - \frac{\mu R^2 u_0^2}{2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) + \gamma M \mu \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) - \right. \\ & \quad \left. \frac{\mathcal{E}}{2} \left[ \frac{r_1^2 - r_2^2 + 2r_1(r_3 - r_2)}{R} + \frac{r_0^2 - r_3^2}{R_1} + 2(r_1 - r_0) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.70})$$

Здесь

$$W_{\text{атм.}} = \int_R^{r_1} F_{\text{атм.}} dr \quad (\text{I.71})$$

Из (I.70) получаем следующее выражение для радиуса  $r_2$  начала выдвигания телескопических выражений ротора

$$r_2 = \sqrt{\frac{2R\mu}{\mathcal{E}} (u^2 - w) - \frac{r_1(r_0^2 - r_3^2)}{r_3} + 2R(r_0 - r_1) - r_1} \quad (\text{I.72})$$

где

$$u^2 = \frac{1}{m+\mu} \frac{\mu u_0^2 R^2}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r_1^2} - \gamma M \mu \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right) - W_{\text{атм.}} - \frac{(\mathcal{E} + E)(r - R)^2}{2R} \right) \quad (\text{I.73})$$

$$w^2 = \frac{\gamma M (m + \mu)}{\mu} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) - \frac{u_0^2 R^2}{2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) \quad (\text{I.74})$$

Необходимо отметить, что изложенная методика гашения осцилляций при выходе на орбиту, применима не только в случаях когда процесс выхода на орбиту заканчивается разрывом системы.



Она может быть обобщена для случая, когда система остаётся цельной, но за счёт расширения телескопических соединений её равновесный радиус (радиус, при котором отсутствуют упругие напряжения при покоящемся роторе) в конечном состоянии изменяется.

## ГЛАВА II. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОТС.

### I. ВВЕДЕНИЕ, ОТС с ОДНИМ РОТОРОМ

---

Рассмотрим динамику аксиально симметричной системы, состоящей из оболочки и одного или нескольких роторов, совершающей маневры на орбите фиксированного радиуса  $R$ . В такой системе, очевидно, возможно перераспределение энергии между роторами и оболочкой, то есть ускорения и замедления. Поставим задачу определения оптимальных параметров такой системы, необходимых для разгона оболочки до требуемой скорости.

Будем считать заданными полную энергию системы и массу оболочки. На основании законов сохранения энергии и момента импульса определим оптимальные значения тех параметров ОТС, — массы роторов, их начальные скорости, количество роторов, полный начальный момент импульса, которые можно варьировать.

Если радиус орбиты фиксирован, то для момента инерции, момента импульса и кинетической энергии оболочки массы  $m_0$  имеем, соответственно

$$I_0 = m_0 R^2,$$

$$J_0 = I \omega = m_0 R v,$$

$$K_0 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

где  $\omega$  — угловая, а  $v$  — линейная скорость движения по орбите. Аналогичные формулы, разумеется, справедливы и для каждого из роторов, массы которых будем обозначать  $m_1, m_2$  и т.д. Поэтому очевидно, что сохранения момента импульса и энергии эквивалентно сохранению импульса и кинетической энергии (потенциальная постоянна вместе с радиусом). При этом импульс, например, оболочки мы определяем как

$$P = m_0 v = J / R$$

Рассмотрим вначале (кратко) систему с одним ротором.

ТЕОРЕМА I. В системе с одним ротором и оболочкой оставаясь на орбите фиксированного радиуса нельзя менять скорость оболочки и ротора непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Запишем законы сохранения кинетической энергии и импульса (момента импульса) :



$$P = m_I v_I = m_I v'_I + m_0 v'_0 \quad (2.1)$$

$$E = m_I v_I^2 = m_I v'^2_I + m_0 v'^2_0 \quad (2.2)$$

Здесь  $v_I$  - начальная скорость ротора, начальная скорость оболочки положена равной нулю,  $v'_I$  и  $v'_0$  - скорости ротора и оболочки в конечном или промежуточном состоянии,  $P$  - полный импульс системы,  $E$  - удвоенная кинетическая энергия. Равенства (2.1), (2.2) можно рассматривать как уравнения для  $v'_0$ ,  $v'_I$ , из которых  $v'_0$  и  $v'_I$  определяются однозначно. Действительно, из (2.1) имеем

$$v'_I = \frac{P - m_0 v'_0}{m_I}, \quad (2.3)$$

а тогда из (2.2) получаем уравнение для  $v'_0$

$$m_0 \left(1 + \frac{m_0}{m_I}\right) v'^2_0 - 2 m_0 v_I v'_0 = 0 \quad (2.4)$$

Таким образом, имеем следующие два решения системы (2.1), (2.2):

$$1) v'_0 = 0; \quad v'_I = v_I \quad (2.5)$$

$$2) v'_0 = \frac{2 m_I v_I}{m_0 + m_I}; \quad v'_I = \frac{m_I - m_0}{m_0 + m_I} v_I \quad (2.6)$$

Решение (2.5) отвечает отсутствию взаимодействия между ротором и оболочкой, решение (2.6) отвечает "упругому удару" движущегося ротора и покоящейся оболочки. В результате такого удара скорости ротора и оболочки меняются скачкообразно.

Важным условием доказанной теоремы является условие отсутствия "третьего тела", способного забирать, а затем отдавать энергию ротору и оболочке. Если, например, в качестве такого "третьего тела" использовать электромагнитное поле, то, очевидно, потери энергии на излучение будут недопустимо большими. Более эффективно для достижения возможности непрерывного перераспределения энергии использовать еще один ротор.



## 2. ОТС с ДВУМЯ РОТОРАМИ

Рассмотрим систему из двух роторов и оболочки. Покажем, что в этом случае энергию оболочки можно менять непрерывно. Кроме того, определим, до какой максимальной скорости можно разогнать оболочку. Это позволит определить оптимальные параметры ОТС, такие как полный начальный импульс, массы роторов и т.д. При этом будем считать энергию, "закачанную" в систему, фиксированной. Поскольку потенциальная энергия на данной орбите фиксирована, то фиксирована и кинетическая энергия, которую обозначим  $K = E/2$ .

Поскольку в дальнейшем нам важно будет определить оптимальный начальный импульс системы двух роторов (оболочка в начальном состоянии покоится), найдём вначале область допустимых значений импульса.

**ТЕОРЕМА 2** При фиксированной начальной энергии  $E$  системы двух роторов с массами  $m_1$  и  $m_2$  их импульсы могут изменяться в пределах

$$-\sqrt{(m_1 + m_2)E} \leq P \leq \sqrt{(m_1 + m_2)E} \quad (2.7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** Импульс и энергия системы двух роторов есть

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (2.8)$$

$$E = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \quad (2.9)$$

Скорости роторов  $v_1$  и  $v_2$  должны быть вещественны. Исключая из (2.8), (2.9)  $v_2$  для определения  $v_1$  имеем уравнение

$$m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_1^2 - 2 \frac{m_1}{m_2} P v_1 + \frac{P^2}{m_2} - E = 0 \quad (2.10)$$

дискриминант которого должен быть неотрицателен:

$$\frac{m_1^2}{m_2^2} P^2 - m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{P^2}{m_2} - E\right) \geq 0 \quad (2.11)$$



Таким образом, мы имеем условие

$$(m_1 + m_2) E \geq P^2 \quad (2.12)$$

совпадающее, как и требовалось доказать, с (2.7).

Отметим, что равенство в (2.12) достигается в случае одинаковых скоростей роторов. Действительно, когда дискриминант уравнения (2.10) равен нулю, то скорость первого ротора

$$V_1 = \frac{2 \frac{m_1}{m_2} P}{2 m_1 \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)} = \frac{P}{m_1 + m_2} \quad (2.13)$$

Тогда скорость второго ротора

$$V_2 = \frac{1}{m_2} \left( P - \frac{m_1}{m_1 + m_2} P \right) = \frac{P}{m_1 + m_2} = V_1 \quad (2.14)$$

Таким образом, если энергия системы двух роторов фиксирована, то максимальный (по величине) начальный импульс достигается в том случае, когда оба ротора движутся в одном направлении с одинаковой скоростью.

Найдём теперь начальные скорости роторов при фиксированных энергии  $E$  и произвольном импульсе  $P$  из интервала (2.7). Из (2.8) - (2.10) имеем

$$V_1 = \frac{P \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1} [(m_1 + m_2) E - P^2]}}{m_1 + m_2}, \quad (2.15)$$

$$V_2 = \frac{P \mp \sqrt{\frac{m_1}{m_2} [(m_1 + m_2) E - P^2]}}{m_1 + m_2} \quad (2.16)$$

При этом, если в (2.15) взят знак плюс, то в (2.16) следует взять знак минус и наоборот. Определим теперь, до какой максимальной скорости можно разогнать оболочку в рассматриваемом случае.



ТЕОРЕМА 3

В системе из двух роторов и оболочки, находящейся на фиксированной орбите, при условии, что начальные энергия  $E$  и импульс  $P$  ( $P > 0$ ) заданы, максимально допустимая скорость оболочки равна

$$v'_{0 \max} = \frac{m_0 P + \sqrt{m_0 (m_1 + m_2) [(m_0 + m_1 + m_2) E - P^2]}}{m_0 (m_0 + m_1 + m_2)} \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Запишем законы сохранения для системы "2 ротора + оболочка" :

$$P = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 + m_0 v'_0 \quad (2.18)$$

$$E = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 + m_0 v'^2_0 \quad (2.19)$$

Исключая из этой системы скорость  $v'_2$ , найдём для определения  $v'_1$  уравнение

$$(m_1 + m_2) v'^2_1 - 2(P - m_0 v'_0) v'_1 + \frac{m_2}{m_1} \left[ \frac{P - m_0 v'_0}{m_2} - (E - m_0 v'^2_0) \right] = 0 \quad (2.20)$$

Его решение

$$v'_1 = \frac{(P - m_0 v'_0) \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1} [(m_1 + m_2) (E - m_0 v'^2_0) - (P - m_0 v'_0)^2]}}{m_1 + m_2} \quad (2.21)$$

Аналогично находим скорость второго ротора.



$$v_2' = \frac{(P - m_0 v_0') \mp \sqrt{\frac{m_1}{m_2} [(m_1 + m_2)(E - m_0 v_0'^2) - (P - m_0 v_0')^2]}}{m_1 + m_2} \quad (2.22)$$

Знаки перед корнями в этих формулах надо брать противоположными. Теперь уже можно сделать принципиальный вывод о том, что можно непрерывно изменять скорость оболочки. При этом скорости первого и второго роторов однозначно определяются по скорости оболочки формулами (2.21), (2.22). совпадают с (2.15), (2.16).

Из (2.21), (2.22) следует, что увеличивать скорость оболочки беспрердельно нельзя, поскольку должно выполняться условие

$$(m_1 + m_2)(E - m_0 v_0'^2) - (P - m_0 v_0')^2 \geq 0 \quad (2.23)$$

Корни квадратного трехчлена в (2.23) таковы:

$$v_0' = \frac{m_0 P \pm \sqrt{m_0 (m_1 + m_2) [(m_0 + m_1 + m_2) E - P^2]}}{m_0 (m_0 + m_1 + m_2)} \quad (2.24)$$

Ясно, что если  $P > 0$ , то для определения максимальной допустимой скорости оболочки  $v_0'_{max}$  необходимо брать знак плюс перед радикалом, и мы приходим к формуле (2.17). Теорема доказана.

### 3. ОПТИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА И СУММАРНОЙ МАССЫ ДВУХ РОТОРОВ

#### ТЕОРЕМА 4

При заданной массе оболочки и заданной начальной энергии  $E$  максимальная скорость до которой можно разогнать оболочку равна  $\sqrt{E/m_0}$  и достижима только тогда, когда суммарная масса роторов не меньше, чем масса оболочки, а начальный импульс двух роторов равен  $P = \sqrt{m_0 E}$

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Формула (2.17) даёт значение максимальной скорости оболочки при заданном импульсе  $P$ . Учтём теперь, что этот импульс может изменяться в пределах (2.7) и определим оптимальное значение импульса.

Для этого, согласно (2.17), надо найти максимум функции

$$f(p) = m_0 p + \sqrt{m_0(m_1 + m_2) [(m_0 + m_1 + m_2)E - p^2]} \quad (2.25)$$

Функция (2.25) есть сумма линейной и радикала, её поведение таково:

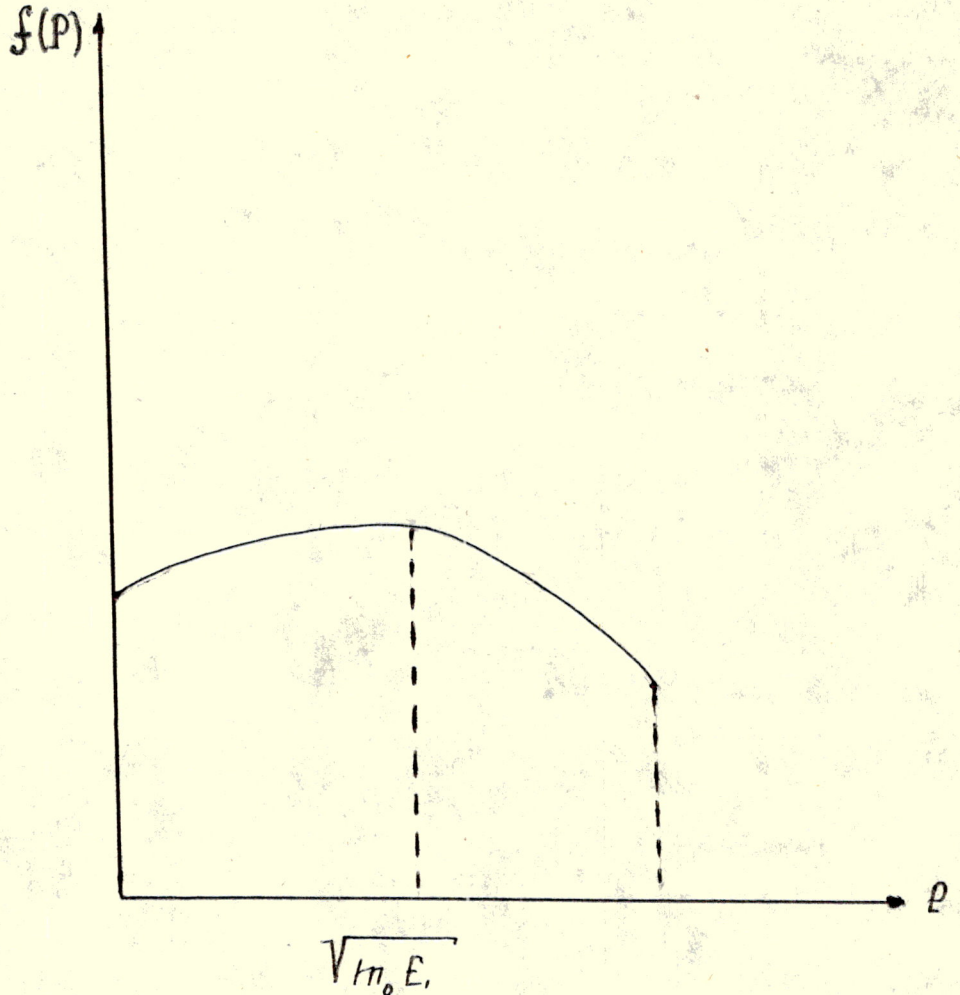


Рис. I

Максимально допустимой, согласно теореме I, импульс  $\sqrt{(m_1 + m_2)E}$  при этом заведомо меньше, чем граничный импульс

$$\bar{p} = \sqrt{(m_0 + m_1 + m_2)E},$$

вплоть до которого формально определена функция  $f(p)$ . Максимум функции  $f(p)$  достигается в точке, где  $f'(p) = 0$ , откуда находим

$$p = \sqrt{m_0 E} \quad (2.26)$$



Следует, однако, заметить, что этот импульс может оказаться недостижимым. Действительно, возможны следующие 2 случая:

$$1) m_0 \geq m_1 + m_2, \quad (2.27)$$

$$2) m_0 \leq m_1 + m_2 \quad (2.28)$$

Рассмотрим, какова максимальная скорость оболочки в каждом из этих случаев. В первом случае максимально допустимый начальный импульс

$\sqrt{(m_1 + m_2)E}$  меньше, чем  $\sqrt{m_0 E}$ . Из вида функции  $f(P)$  ясно, что максимум скорости  $v'_{0 \max}$  достигается при

$$P = \sqrt{(m_1 + m_2)E}$$

и равен, как это следует из (2.17)

$$v'_{0 \max} = \frac{2\sqrt{(m_1 + m_2)E}}{m_0 + m_1 + m_2} \quad (2.29)$$

При фиксированной массе оболочки эта скорость зависит от суммы масс  $m_1 + m_2$

причём максимум достигается при  $m_1 + m_2 = m_0$ . Зависимость  $v'_{0 \max}$  при  $m_1 + m_2 \leq m_0$  изображена на рисунке 2.

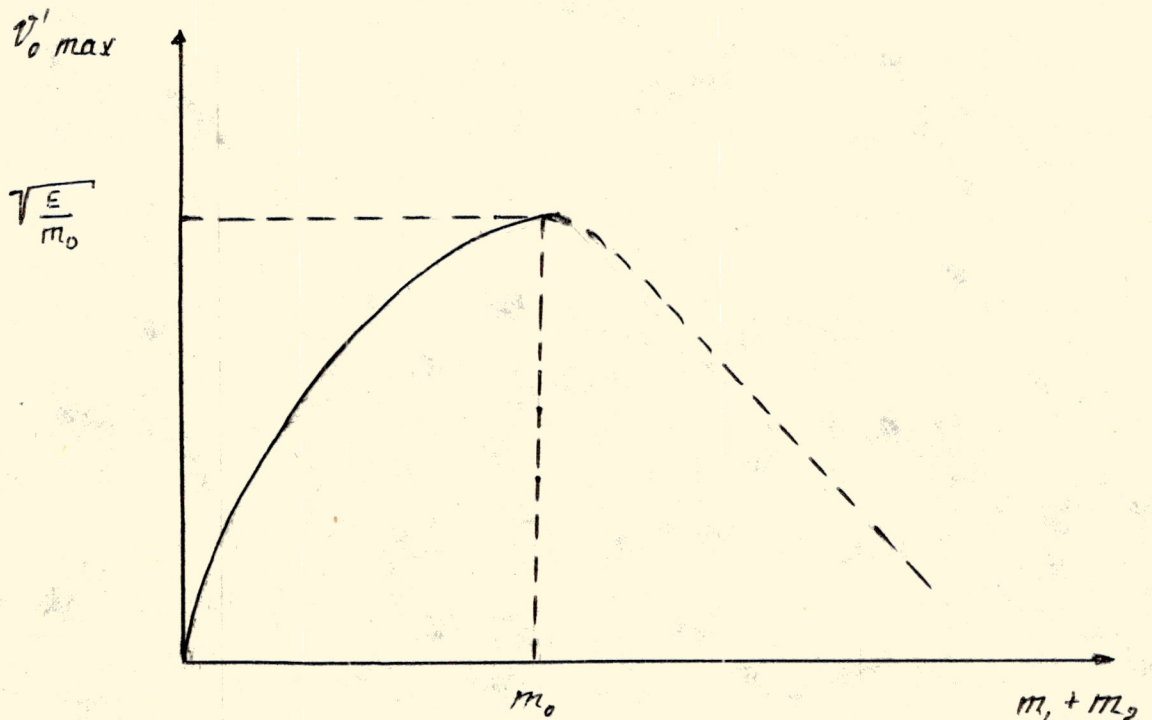


Рис. 2

Во втором случае, когда  $\sqrt{m_0 E}$  (см. рис. 1) попадает в интервал допустимых значений импульса, максимум скорости  $v'_{0max}$  достигается при  $P = \sqrt{m_0 E}$ . Этот максимум, согласно (2.17), равен

$$v'_{0max} = \sqrt{\frac{E}{m_0}} \quad (2.30)$$

и не зависит от  $m_1 + m_2$ , что изображено на рисунке 3

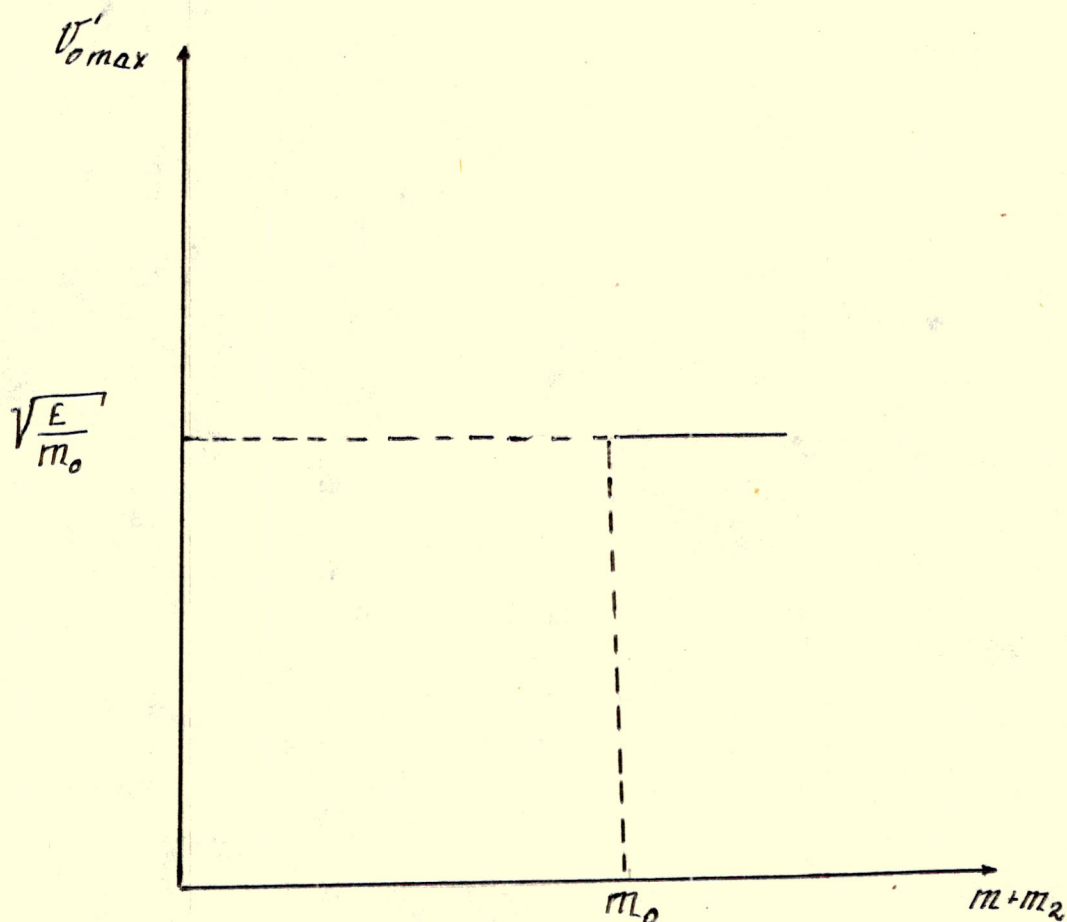


Рис. 3

Резюмируем сказанное. При заданной энергии максимальная развиваемая оболочкой скорость зависит от суммы масс роторов  $m_1 + m_2$ . При  $m_1 + m_2 \leq m_0$  оптимальный импульс  $P = \sqrt{(m_1 + m_2)E}$ , при  $m_1 + m_2 \geq m_0$  оптимальный импульс  $P = \sqrt{m_0 E}$ . Зависимость



$v'_{0 \max}$  от  $m_1 + m_2$  для всех  $m_1 + m_2$  изображена на рис. 4

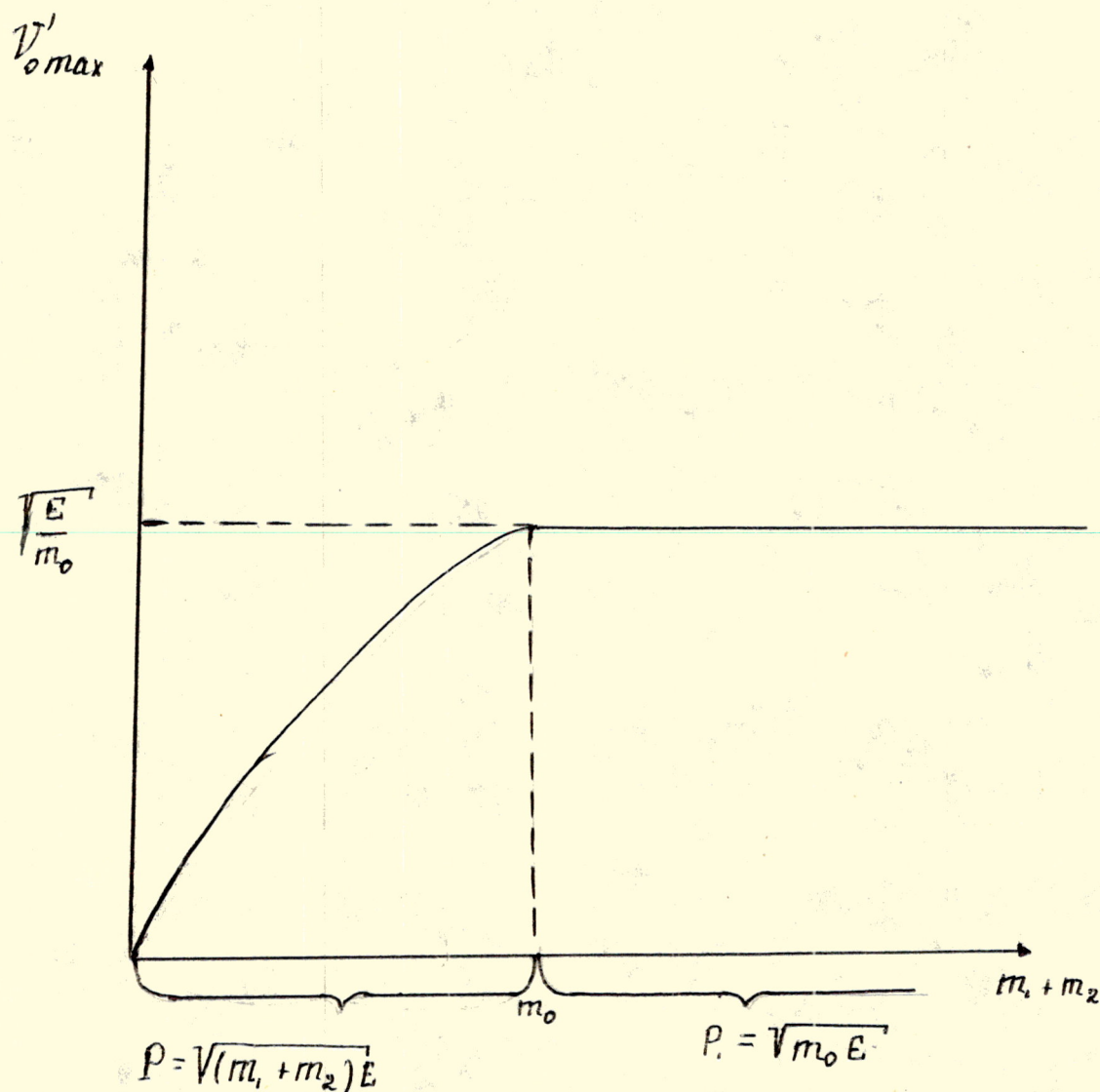


Рис. 4.

Таким образом, максимальная скорость, до которой можно разогнать оболочку не превышает  $\sqrt{E/m_0}$  и достижима при оптимальном значении импульса  $P = \sqrt{m_0 E}$ . При этом суммарная масса роторов должна быть не меньше массы оболочки. Теорема доказана.

Сформулируем очевидные следствия из доказанного.

**СЛЕДСТВИЕ I.** Оптимальная суммарная масса роторов равна массе оболочки роторов равна массе оболочки. Действительно, увеличение  $m_1 + m_2$  не может привести к увеличению максимальной скорости, но потребует дополнительных затрат на увеличение потенциальной энергии роторов при выходе на орбиту.

**СЛЕДСТВИЕ 2.** При оптимально выбранном импульсе  $P = \sqrt{m_0 E}$  роторы в конечном состоянии покоятся. Это следует из того, что при  $v_0' \max = \sqrt{E/m_0}$  мы имеем  $E = m_0 v_0'^2$ , а значит суммарная кинетическая энергия роторов, согласно (2.17), равна нулю.

**СЛЕДСТВИЕ 3.** При  $m_1 + m_2 = m_0$ , то есть когда масса роторов оптимальна, оптимальный импульс  $P = \sqrt{m_0 E}$  совпадает с максимально достижимым при этой же энергии импульсом  $P = \sqrt{(m_1 + m_2) E}$ . Это означает, согласно (2.13), (2.14), что роторы в начальном состоянии движутся с одинаковыми скоростями.

#### 4. ОПТИМАЛЬНЫЕ МАССЫ РОТОРОВ

**ТЕОРЕМА 5.** В системе "2 ротора плюс оболочка" оптимальные массы роторов одинаковы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зависимость скоростей роторов от скорости оболочки даётся формулами (2.21), (2.22). Выберем в (2.21) знак плюс, а в (2.22) знак минус и подставим в них оптимальное значение импульса

$$P = \sqrt{m_0 E} \quad \text{и суммарной массы роторов} \quad m_1 + m_2 = m_0$$

Тогда получим

$$v_1' = \sqrt{\frac{E}{m_0}} - v_0' + \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \left[ 2m_0 v_0' \left( \sqrt{\frac{E}{m_0}} - v_0' \right) \right]}, \quad (2.31)$$

$$v_2' = \sqrt{\frac{E}{m_0}} - v_0' - \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \left[ 2m_0 v_0' \left( \sqrt{\frac{E}{m_0}} - v_0' \right) \right]} \quad (2.32)$$

Из этих формул ясно, что для того, чтобы увеличивать скорость оболочки необходимо сначала увеличивать скорость первого ротора и уменьшать скорость второго. Таким образом, за счёт торможения второго ротора разгоняется оболочка, но обязательно вместе с ней необходимо ускорять и первый ротор.



Относительная скорость роторов при этом равна

$$v_1' - v_2' = \left( \sqrt{\frac{m_2^2}{m_1}} - \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) \sqrt{2m_0 v_0' \left( \sqrt{\frac{E}{m_0}} - v_0' \right)} \quad (2.33)$$

Для каждой скорости оболочки  $v_0'$  эта разность должна быть выбором масс  $m_1$  и  $m_2$  сделана минимальной. Нетрудно убедиться, что функция  $\sqrt{m_2/m_1} - \sqrt{m_1/m_2}$

достигает минимума при  $m_1 = m_2$ , что и требовалось доказать.

Проиллюстрируем теперь характер поведения скоростей роторов 1 и 2 в зависимости от скорости оболочки при оптимальных значениях масс роторов  $m_1 = m_2 = m_0 / 2$ , полагая для простоты массу оболочки единичной ( $m_0 = 1$ ). Из формул (2.21), (2.22) тогда

имеем

$$v_1' = P - v_0' + \sqrt{(E - v_0'^2) - (P - v_0')^2}, \quad (2.34)$$

$$v_2' = P - v_0' - \sqrt{(E - v_0'^2) - (P - v_0')^2} \quad (2.35)$$

На рис. 5 даны графики этих функций при  $E = (8,2)^2$  и  $P = 8,2$

Из этих графиков видно, что второй ротор вначале замедляется, отдаёт свою энергию оболочке, что естественно, а также первому ротору, который при этом ускоряется. Затем замедляются оба ротора, отдавая энергию оболочке, причём в некоторый момент скорость второго ротора становится равной нулю. После этого первый ротор продолжает замедляться, отдавая энергию оболочке и второму ротору, который ускоряется в обратном первоначальному направлению. На последней стадии замедляются оба ротора (движущиеся в противоположных направлениях), а оболочка ускоряется до  $v_{0', \max}$ . Скорости роторов в конечном состоянии равны нулю.

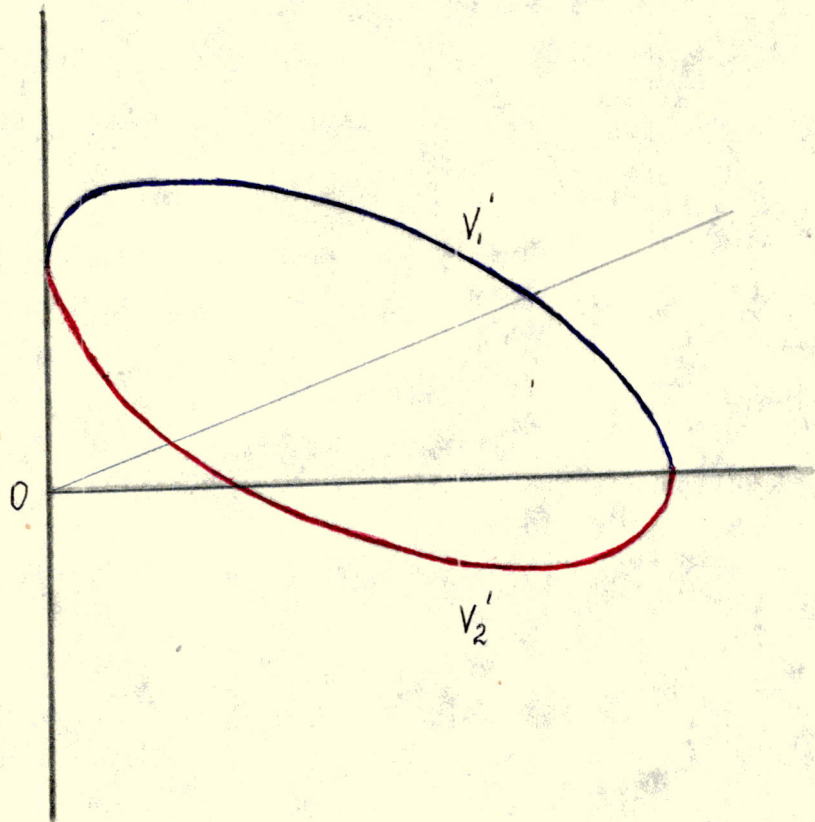


Рис. 5



## 5. ОТС С ТРЕМЯ И БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ РОТОРОВ

Для того, чтобы уменьшить затрату на увеличение потенциальной энергии роторов их массу, очевидно, надо брать меньшей. С другой стороны, как показано выше, для наилучшего разгона оболочки необходимо массу роторов  $m_1 + m_2$  увеличивать (как минимум до  $m_0$ ). Зададимся поэтому следующим вопросом: нельзя ли увеличивая число роторов при их фиксированной суммарной (гравитационной) массе сделать их эффективную (кинематическую) массу больше, чем суммарная. Рассмотрим вначале систему "3 ротора плюс оболочка".

ТЕОРЕМА 6 Замена ротора 2 с массой  $m_2$  на два ротора с массами  $m'_2$  и  $m'_3$  ( $m_2 = m'_2 + m'_3$ ) выигрыша для максимального разгона оболочки не даёт, ибо их эффективная масса не превосходит  $m_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Запишем законы сохранения для системы "3 ротора плюс оболочка"

$$P = m_1 v_1' + m_2' v_2' + m_3' v_3' + m_0 v_0', \quad (2.36)$$

$$E = m_1 v_1'^2 + m_2' v_2'^2 + m_3' v_3'^2 + m_0 v_0'^2 \quad (2.37)$$

Заменим второй и третий роторы эффективным ротором массы  $M_\theta$  и скорости  $V_\theta$  так, что

$$M_\theta V_\theta = m_2' v_2' + m_3' v_3' \quad (2.38)$$

$$M_\theta V_\theta^2 = m_2' v_2'^2 + m_3' v_3'^2 \quad (2.39)$$

Отсюда нетрудно найти эффективные массу и скорость  $M_\theta, V_\theta$ :

$$M_\theta = \frac{(m_2' v_2' + m_3' v_3')^2}{m_2' v_2'^2 + m_3' v_3'^2}, \quad (2.40)$$



$$V_2 = \frac{m_2' v_2'^2 + m_3' v_3'^2}{m_2' v_2' + m_3' v_3'^2} \quad (2.41)$$

Покажем теперь, что эффективная масса  $M_э$  меньше чем

$$m_2 = m_2' + m_3' .$$

В справедливости неравенства

$$\frac{(m_2' v_2' + m_3' v_3')^2}{m_2' v_2'^2 + m_3' v_3'^2} \leq m_2' + m_3' \quad (2.42)$$

нетрудно убедиться, поскольку оно эквивалентно неравенству

$$m_2' m_3' (v_2'^2 + v_3'^2 - 2 v_2' v_3') \geq 0 \quad (2.43)$$

Равенство в (2.42), (2.43) достигается только при  $v_2' = v_3'$ ,

т.е. когда роторы 2 и 3 движутся с одинаковыми скоростями.

Из формул

$$P = m_I v_I' + M_э v_э + m_0 v_0' \quad (2.44)$$

$$E = m_I v_I'^2 + M_э v_э^2 + m_0 v_0'^2 \quad (2.45)$$

также как из (2.18), (2.19), следует, что максимальная скорость оболочки будет тем больше, чем больше  $m_I + M_э$ . Но  $M_э$  не превосходит  $m_2 = m_2' + m_3'$ . Следовательно, замена ротора 2 с массой  $m_2$  на роторы 2 и 3 с массами  $m_2'$  и  $m_3'$  может только ухудшить ситуацию (когда роторы 2 и 3 движутся с разными скоростями) или оставить максимальную скорость оболочки прежней, но только тогда, когда роторы 2 и 3 движутся с одинаковыми скоростями и представляют собой фактически один ротор. Теорема до-



казана.

Теперь ясно, что замена одного из роторов в системе "2 ротора плюс оболочка" не на два, а на большее число роторов, также не может улучшить ситуацию. Это можно показать с помощью метода математической индукции, переходя от трёх роторов к четырём, от четырех к пяти и т.д. Это же можно показать и непосредственно.

ТЕОРЕМА 7 Замена ротора 2 с массой  $m_2$  на  $n - 1$  роторов с массами  $m'_2, \dots, m'_n$  ( $m_2 = \sum_{i=2}^n m'_i$ ) выигрыша для максимального разгона оболочки не даёт.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Заменяем все роторы, кроме первого, эффективным ротором с массой  $M_э$  и скоростью  $V_э$ , так, что

$$M_э V_э = m'_2 v'_2 + m'_3 v'_3 + \dots + m'_n v'_n, \quad (2.46)$$

$$M_э V_э^2 = m'_2 v'^2_2 + m'_3 v'^2_3 + \dots + m'_n v'^2_n \quad (2.47)$$

Эффективная масса и скорость равны таким образом

$$M_э = \frac{\left( \sum_{i=2}^n m_i v'_i \right)^2}{\sum_{i=2}^n m'_i v_i'^2} \quad (2.48)$$

$$V_э = \frac{\sum_{i=2}^n m'_i v_i'^2}{\sum_{i=2}^n m'_i v_i'} \quad (2.49)$$

Для того, чтобы показать, что эффективная масса меньше, чем суммарная масса  $\sum_{i=2}^n m'_i$ , запишем требуемое неравенство в виде

$$\left( \sum_{i=2}^n m'_i v'_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=2}^n m'_i v_i'^2 \right) \left( \sum_{i=2}^n m'_i \right). \quad (2.50)$$

После простых преобразований получаем, что (2.50) эквивалентно неравенству

$$\sum_{i \neq j} m_i m_j (v_i - v_j)^2 \geq 0, \quad (2.51)$$

которое, очевидно, справедливо.

Таким образом, замена второго ротора на  $n - 1$  роторов не может увеличить их эффективную массу. Равенство

$$M_g = \sum_{i=2}^n m'_i$$

достигается, очевидно, когда скорости роторов 2, 3, ...  $n$  одинаковы, то есть они ведут себя как один ротор.

Резюмируя изложенное можно сказать, что оптимальное число роторов равно двум. Увеличение числа роторов не может увеличить максимальную скорость оболочки, увеличивает относительные скорости в системе, что нежелательно, и кроме этого ведёт к конструктивным усложнениям.



## ПРИЛОЖЕНИЕ I

---

### СИЛА УПРУГОСТИ

Из теории упругости следует, что при малых (до нескольких процентов) относительных деформаций твёрдого тела, возникающая сила упругости прямо пропорциональна относительному удлинению и поперечному сечению:

$$F = \tilde{E} \cdot \frac{l - l_0}{l} \cdot S$$

Здесь  $E$  - модуль Юнга (для стали

$$E = 1,95 \div 2,06 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2)$$

$l_0$  - начальный линейный размер тела

$S$  - поперечное сечение

Однако, как известно, растяжение тела сопровождается изменением и его поперечных размеров, причём, эта зависимость характеризуется коэффициентом Пуассона  $\sigma$

$$\frac{da}{a} = -\sigma \frac{dl}{l}$$

Здесь  $a$  - линейный поперечный размер тела. Интегрируя это равенство мы получаем

$$a = a_0 \left( \frac{l_0}{l} \right)^\sigma$$

Или для круговых сечений

$$S = S_0 \left( \frac{l_0}{l} \right)^{2\sigma}$$

Коэффициент Пуассона изменяется в пределах

$$0 < \sigma < \frac{1}{2} \quad (\text{для стали } \sigma \approx 0,24 \div 0,30).$$

Таким образом, закон Гука с учётом поперечных деформаций принимает вид

$$F = \tilde{E} \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot S_0 \left( \frac{l_0}{l} \right)^{2\sigma} = \tilde{E} \cdot S_0 \sigma (1 - \sigma)^{2\sigma} \approx E \cdot \varepsilon (1 - 2\sigma \varepsilon)$$

где  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \ll 1$  - относительное удлинение тела.



Таким образом, при определении аэродинамического сопротивления необходимо учитывать некоторую модель атмосферы. Зависимость  $p(H)$ , где  $H$  - высота подъёма, для реальной атмосферы довольно сложная. Из основного уравнения состояния газа следует, что

$$p = \frac{\mu_e p}{R T},$$

где  $\mu_e$  - удельная молярная масса воздуха ( $\mu_e = N_A \cdot m_b, m_b = 29 \text{ а.е.м.} = 29 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ,  $N_A$  (число Авогардо) =  $6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ )

$R = 8,31 \text{ Дж/ (К моль)}$  - универсальная газовая постоянная,  $p$  и  $T$  - давление и температура соответственно. Для изотермического подъёма.

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{k T}\right),$$

где  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$  - давление у поверхности Земли при

$T = 15^\circ \text{ C} = 280^\circ \text{ K}$ ,  $g$  - ускорение свободного падения.

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$  - постоянная Больцмана.

Однако в реальной атмосфере зависимость  $T = T(h)$  имеет сложный вид, как изображено на рис. 1. Поэтому в общем случае зависимость плотности атмосферы от высоты определяется формулой

$$p(h) = \frac{\mu_b p_0}{R T(h)} \exp\left(-\int_0^h \frac{\mu_b g(h') dh'}{k T(h')}\right),$$

где  $g(h') \approx g_0 \left(1 - \frac{2h'}{R_3}\right)$ ,  $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,

$R_3 = 6,38 \cdot 10^6 \text{ м}$  - радиус Земли. Причём следует иметь ввиду, что на высоте  $\sim 100 \text{ км}$  происходит разделение газов в атмосфере. В результате чего плотность атмосферы до  $10 \text{ км}^3$  будет определяться главным образом содержанием кислорода и азота согласно формуле:

$$p(100 \text{ км} \leq h \leq 1000 \text{ км}) = \frac{\mu_{N_2} p_{100}}{R T(h)} \exp\left(-\int_{100}^h \frac{\mu_{N_2} g(h') dh'}{k T(h')}\right) + \frac{\mu_0}{R T(h)} \exp\left(-\int_{100}^h \dots\right)$$



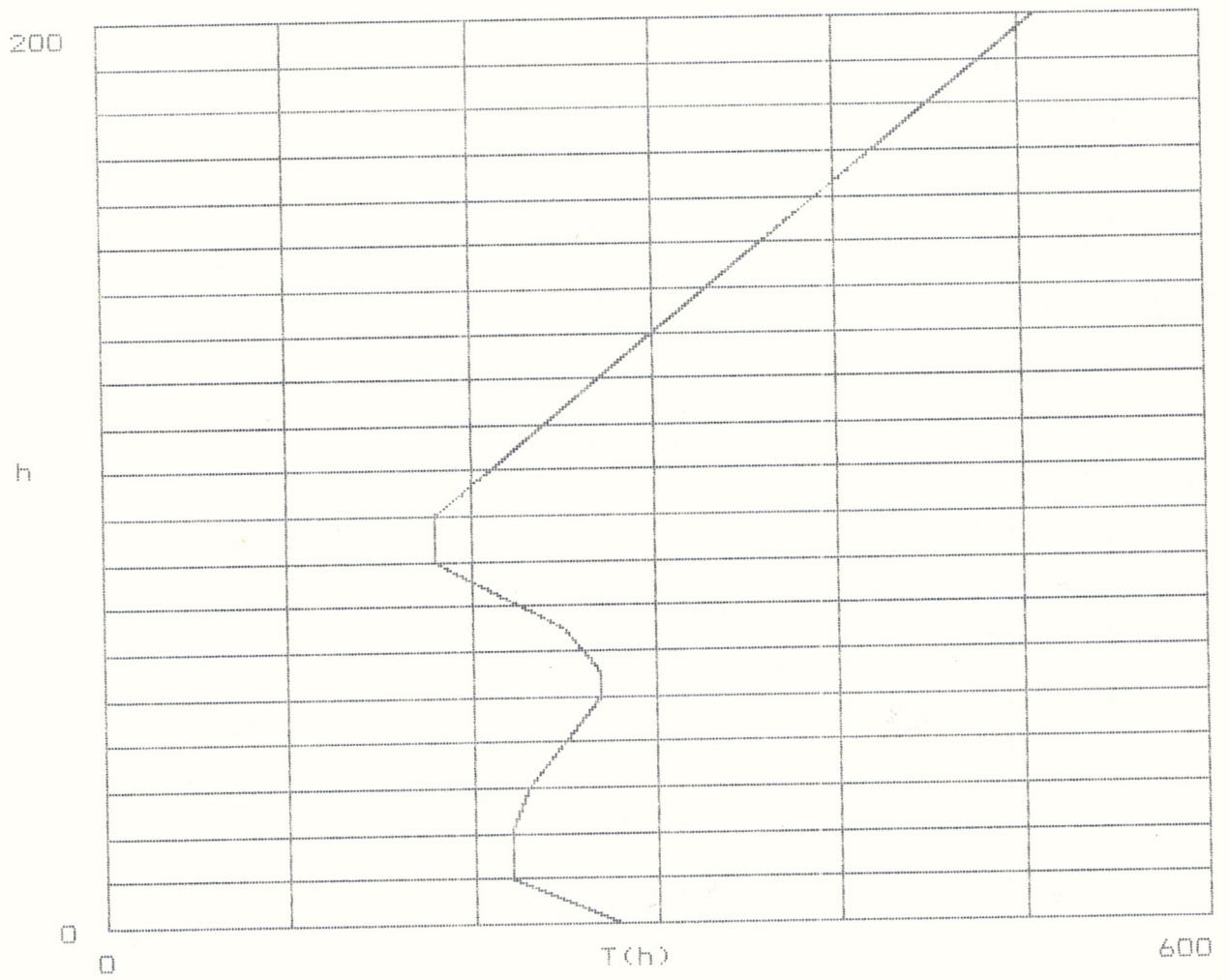


Рис. I

Рис. I

$$\frac{\mu_0 g(h') dh'}{k T(h')} \quad ) ,$$

где  $\mu_N = N_A \cdot 28 \text{ а.е.м.}$ ,  $\mu_0 = N_A \cdot 16 \text{ а.е.м.}$

При учёте аэродинамического сопротивления использует тот факт, что если влияние атмосфер мало, что имеет место при малых скоростях и больших массах, то сложную структуру реальной атмосферы можно заменить более простой усредненной моделью [1]. (См., например, Фабрикант М.Я. Аэродинамика, М., 1964 г.). Для усредненной модели

$$p = \alpha \exp(-\beta h),$$

где  $\alpha = 1,225 \text{ кг/м}^3$

где  $\beta = 955,736 \text{ м}^{-1}$



АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

При движении некоторого объекта, в атмосфере, одной из важных задач является правильный учёт аэродинамической силы сопротивления. Как известно, полная аэродинамическая сила представляет собой сумму проекций на направление движения тела распределенных по поверхности нагрузок. Причём, нагрузки перпендикулярные поверхности тела определяют давление со стороны атмосферы, а нагрузки касательные - вязкое трение.

Рассеяние кинетической энергии движущегося объекта и превращение её в тепловую, происходит посредством образования вихрей, ударных волн, а также просто из-за поверхностного нагрева.

В идеальной несжимаемой жидкости теоретически аэродинамического сопротивления нет (парадокс Д'Аламбера - Эйлера). Однако наличие вязкости в реальных средах приводит к аэродинамическому сопротивлению трения, а также к отрыву поток от тела, влияющему на распределение давления на поверхности тела. При дозвуковом течении основной вклад в аэродинамическое сопротивление вносят сопротивление трения, которое пропорционально скорости тела и отрыв потока с вихреобразованием. Сила сопротивления в последнем случае пропорциональна квадрату скорости. При дозвуковых скоростях аэродинамический нагрев незначителен, т.к. разность температур  $\Delta T \sim 50\text{K}$ .

Режим и характер вязкого течения зависят от числа Рейнольдса  $Re$ :

$$Re = \frac{v \ell \rho}{\eta},$$

где  $v$  - скорость тела,  $\ell$  - его характерный линейный размер,  $\rho$  - плотность среды,  $\eta$  - её вязкость. При очень больших ( $\sim 10^6$ ) числах Рейнольдса вязким трением можно пренебречь, что как раз и имеет место в случае движения ОТО в атмосфере. Определяющая аэродинамическое сопротивление сила движения имеет вид:

$$F_{\text{аэр.с.}} = C_a \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где  $C_a$  - коэффициент аэродинамического сопротивления тела, который для тонкого цилиндра длина  $\ell$  можно выбрать равным 0,91. (вообще говоря,  $C_a$  для летательных аппаратов определяется только из результатов натуральных экспериментов);

$S$  - площадь сечения;  $\rho$  - плотность атмосферы.