

МАНЕВРИРОВАНИЕ РОТОРА С ЦЕЛЬЮ ОБХОДА ОБЪЕКТОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Оптимальным вариантом сооружения и функционирования ОТС является наличие двух эстакад — экваториальной и широтной. Поочередные запуски роторов ОТС позволяют выбрать лучшие по условиям погоды, сейсмичности и т.д. моменты запусков, не снижая их общего темпа. В уже функционирующей системе могут возникнуть ситуации, требующие добавления нового ротора, замены старого, подвоза грузов к какому-либо ротору или же вывода ротора с грузами за пределы земного притяжения. Все это невозможно при запуске с экваториальной эстакады, т.к. орбиты функционирующих роторов располагаются в экваториальной плоскости и неизбежно их столкновение с новым, если не будут приняты специальные меры. Движение же ротора с широтной эстакады позволяет совершить маневр по обходу препятствий или части их, вывести ротор в заданное положение в свободном промежутке, а также подойти к любому объекту системы.

Высокие горные массивы, океанские просторы, большие глубины, мощные течения могут привести к задержке строительства экваториальной и первоочередному строительству более простой широтной эстакады вдоль одной из параллелей, где могут быть те же сложности, но в меньших масштабах. Это дает возможность выбора наиболее оптимального варианта по критериям экономичности, надежности, технологичности и т.д. Опыт строительства и эксплуатации такой эстакады может быть использован затем при сооружении экваториальной эстакады.

В качестве необычного, на первый взгляд, варианта возможна добыча и переработка сырья на других телах Солнечной системы и доставка продукции на Землю с помощью роторов, которые запускаются с широтных эстакад, сооруженных на этих телах. Роторы в этом случае

* Маневрирование возможно и при запуске ОТС с экваториальной эстакады, например, с использованием аэродинамических сил, когда на атмосферном участке движения ротор уведется с экваториальной плоскости в другую плоскость, параллельную ей.

должны иметь большое разнообразие траекторий и других характеристик движения, что позволит достигать Землю с минимальными корректирующими импульсами.

В условиях планет-гигантов возникают проблемы преодоления естественных колец и систем спутников, а также строительства в условиях разряженных атмосфер и при отсутствии твердой основы. Можно, однако, наморозить эстакаду и другие сооружения, достаточно прочные и в то же время легкие, которые будут плавать в верхних слоях атмосферы. Возможны также надувные, типа велосипедной камеры, ангаров и т.д., конструкции эстакады и других сооружений или их частей, с искусственно созданной в них средой обитания человека. Было бы на этих планетах сырье, необходимое для земной цивилизации, а изобретательность и упорство человека не знают преград.

Кроме экологических бед, вызванных бесконтрольной деятельностью человека, серьезную опасность для человечества представляет внешняя угроза, заключающаяся в возможности соударения Земли с крупными астероидами, что не раз случалось в геологической истории Земли. Поверхность Луны почти сплошь покрывают многочисленные ударные кратеры, та же картина наблюдается и на других телах Солнечной системы, на которых поверхность твердая, а атмосфера слабая или вовсе отсутствует. Но атмосфера не является преградой для крупных астероидов, она лишь способна сглаживать следы их действия.

Вероятность столкновения с астероидом в ближайшем будущем достаточно велика, а возможные последствия могут быть весьма серьезны — изменение климата, исчезновение многих видов земной жизни, большие потери для человечества. Поэтому на эту проблему уже нельзя не обращать внимания. Выйдя на глобальный уровень деятельности, человек должен взять на себя функции защиты Земли и от внешних опасностей. Как известно, созданы международные и национальные организации, изучающие астероидную опасность. На этом направлении сделаны только первые шаги.

Проект ОТС и здесь представляет интересные возможности. В первых, использование системы роторов создает намного лучшие условия наблюдения за движением малых тел Солнечной системы, независимо от погоды, атмосферных помех, с огромной базой для средств наблюдения. В случае расположения наблюдательных станций на роторе, движущемся по геостационарной орбите, расстояния между станциями могут достигать 80000 км, что намного повышает точность наблюдений и расчета траекторий астероидов, их размеров, масс, структуры и других параметров. Увеличивается оперативность службы наблюдения и выигрывается время для принятия решения, если астероид представляет опасность для Земли.

Во-вторых, роторы могут служить базой для размещения средств разрушения или другого воздействия на приближающийся астероид: ракет с ядерными зарядами, лазеров и т.д. с автономным энергетическим обеспечением за счет солнечного излучения и системой управления этими средствами. Немаловажен фактор экологической чистоты этих средств, т.к. при их действии с земной поверхностью может быть значительный урон окружающей среде в связи с возможным большим числом запуска ракет, огромными мощностями лазеров и т.д.

Наиболее эффективное воздействие на опасный приближающийся астероид может оказать специальный ротор ОТС, оснащенный известными сейчас или разработанными к тому моменту новыми средствами. Можно рассчитать управляемое движение ротора, выведенного из зоны притяжения Земли и разделенного на фрагменты таким образом, чтобы определенные их группы приближались к астероиду одновременно. Воздействие лазерами с близкого расстояния, одновременный взрыв большого количества ядерных зарядов или другие концентрированные воздействия могут разрушить, раздробить астероид или отклонить его траекторию.

Астероид или его осколки в этом случае подвергаются многократному координированному воздействию: сначала со стороны нескольких групп фрагментов специального ротора, затем средств борьбы с астероидной опасностью индустриального кольца и, наконец, средств, сосредоточенных на земной поверхности. В согласии с законами крупномасштабной войны, только глубоко эшелонированная оборона может быть успешной.

При рассмотрении этих и других проблем возникает задача исследования ротора, запускаемого с широтной эстакады, при наличии препятствий типа роторов, колец или дискретных космических объектов, орбиты которых находятся в экваториальной плоскости.

3.1. Постановка задачи о маневрировании ротора ОТС

Исследуем движение ротора ОТС при выводе его на орбиту с широтной эстакады, расположенной в плоскости Π_0 , параллельной плоскости Π_1 экватора планеты. Пусть в плоскости Π_1 имеются естественные препятствия в виде колец, спутников, как на планетах-гигантах Юпитере, Сатурне, Уране или искусственные — другие ранее выведенные роторы, космические станции и т.д., образующие, возможно, некоторые кольцеобразные структуры. Расположение и размеры препятствий в общем случае произвольны, но полагаем, что их поперечные размеры, перпендикулярные плоскости Π_1 , малы, по сравнению с

размерами планеты, а между орбитами препятствий имеются свободные промежутки. Что касается крупных естественных спутников, то обычно они удалены на значительные расстояния, на порядок или больше превышающие радиус планеты. Полагаем еще, что орбиты всех искусственных объектов в окрестностях планеты находятся внутри орбит крупных естественных спутников. В случае выхода ротора ОТС за пределы притяжения планеты необходимо учитывать размеры крупных спутников и обеспечивать условия бесконтактного с ними движения ротора.

Орбита выводимого ротора может находиться только в экваториальной плоскости; она задается с учетом расположения ротора в одном из свободных промежутков между орбитами имеющихся препятствий. Движение ротора в экваториальной плоскости Π_1 недопустимо ввиду неизбежности столкновения с препятствиями. Вне этой плоскости движение достигается путем аэродинамического маневра в атмосфере, например, за счет крылообразной формы оболочки или же при старте с широтной эстакады. Ниже рассмотрен второй вариант.

Как показано в дальнейшем, ротор совершает колебания относительно характерной точки, определяющей положение плоскости ротора Π по отношению к плоскости Π_1 . Угол собственного вращения ротора, являясь циклической координатой, исключается из последующего рассмотрения.

Задачу о маневрировании ротора сформулируем, как выбор такого управления указанными двумя движениями ротора, чтобы, стартовав в плоскости Π_0 и не столкнувшись ни с одним из препятствий, ротор вышел на заранее заданную орбиту в плоскости Π_1 , погасив при этом радиальные и вращательные колебания. Вторая часть задачи: при тех же условиях вывести ротор из зоны притяжения планеты.

Факторами управления и диссипации могут быть внешние воздействия, например, магнитное поле планеты и внутренние фрикционные силы между раздвигающимися фрагментами ротора. При этом предполагается возможность регулирования диссипативных сил от нулевого до максимального значений. Рассмотрим три режима движения ротора при раздвижении фрагментов:

1. Диссипативные силы отсутствуют; назовем такой режим свободным движением или свободным расширением ротора;
2. Действует только внешние диссипативные силы;
3. Действуют только внутренние (фрикционные) диссипативные силы.

Для краткости используем названия: первый (I), второй (II) и третий (III) режимы движения ротора. Возможен также четвертый режим, когда для ускорения процесса диссипации энергии радиального

движения ротора используются оба типа диссипативных сил или все возможные в данном случае силы.

Отметим некоторые особенности дальнейшего исследования.

1. Не обсуждаются вопросы технической реализуемости проекта ОТС в конкретных условиях той или иной планеты: создания эстакады, сборки ротора и его запуска, устройства ротора и его свойств.

2. Не рассматривается этап движения ротора в оболочке в плотных слоях атмосферы, чтобы не усложнять решаемую задачу о маневрировании. Исследование начинается с момента выхода ротора из атмосферы и сброса всей оболочки, при этом полагаем, что радиальная скорость ротора в этот момент равна нулю и ротор не имеет упругих деформаций растяжения.

3. Примеры решения задачи о маневрировании в условиях Урана и Сатурна имеют иллюстративный характер, при этом не учитываются физические свойства планет и их атмосферы. Рассматриваются только системы колец и спутников в качестве примеров препятствий, которые преодолевает ротор при выходе на заданную орбиту.

3.2. Дифференциальные уравнения движения ротора ОТС вне экваториальной плоскости

Движение ротора определяется по отношению к инерциальной системе отсчета с началом в центре планеты, при этом ось Z направлена вдоль оси вращения планеты и ротора, оси X, Y — в плоскости Π_1

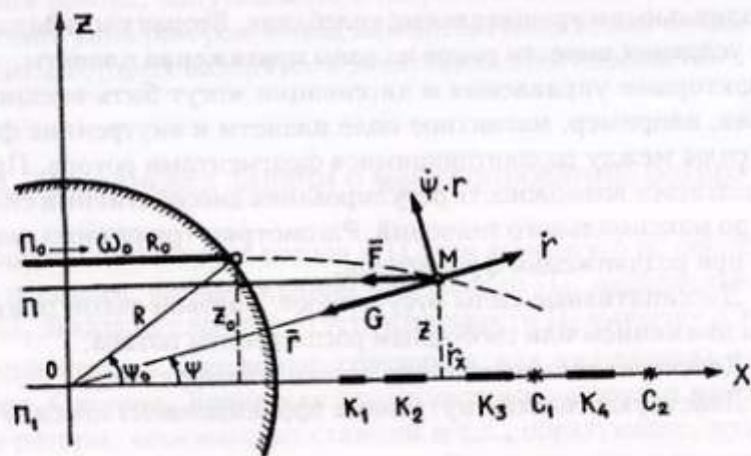
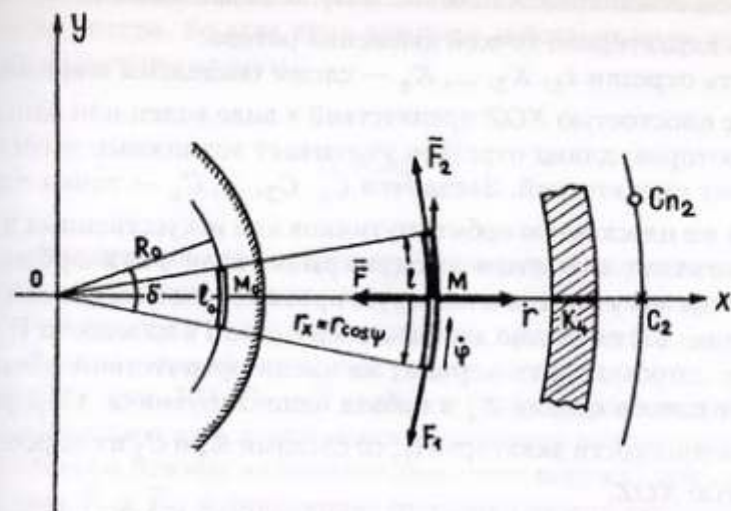


Рис. 3.1. Схема движения точки M пересечения траектории движения ротора с плоскостью XOZ ; Π_0 и Π — стартовая и текущая плоскости движения ротора



3.2. Схема движения элемента ротора в плоскости Π ; кольцо K_4 и спутник Cn_2 — в плоскости экватора Π_1

экватора. Влияние Солнца, других планет, крупных спутников, а также препятствий, вблизи которых проходит ротор, не учитываются.

В начальном состоянии ротор вращается с угловой скоростью ω_{p0} вокруг оси Z в плоскости Π_0 , параллельной Π_1 и отстоящей от нее на расстоянии $z_0 = R \sin \psi_0$, где R — радиус сферы, ограничивающей плотную атмосферу, ψ_0 — начальное значение угла ψ , определяющего движение плоскости ротора Π относительно плоскости Π_1 экватора (рис. 3.1). Начальный радиус орбиты ротора $r_{p0} = R \cos \psi_0$, начальная линейная скорость вращательного движения $V_0 = \omega_0 r_{p0} = \omega_0 R \cos \psi_0$.

Как уже отмечено, начальное состояние ротора и значения R, ω_0 и V_0 соответствуют моменту его выхода из атмосферы и сброса всей оболочки. Если планета не имеет атмосферы, то стартовое состояние (также без оболочки) соответствует положению на широтной эстакаде.

В качестве модели ротора принимаем тонкое кольцо с однородными механическими свойствами, разделяющееся на фрагменты с телескопическими соединениями в момент старта.

Схема третьего (фрикционного) режима движения ротора, некоторых действующих сил и препятствий, показана на рис. 3.1 и 3.2. На рис. 3.1 представлены две составляющие движения точки M пересечения ротора с плоскостью XOZ : радиальное движение и движение пло-

скости Π по отношению к плоскости Π_1 . В дальнейшем точку M будем называть характерной точкой движения ротора.

Пусть отрезки k_1, K_2, \dots, K_n — следы (выделены жирным) пересечения с плоскостью XOZ препятствий в виде колец или ранее выведенных роторов; длина отрезков учитывает возможные эксцентриситеты орбит препятствий. Звездочки C_1, C_2, \dots, C_n — точки пересечения с той же плоскостью орбит спутников или искусственных дискретных объектов; с учетом эксцентриситетов этих орбит следы пересечения могут иметь некоторую протяженность вдоль оси OX .

На рис. 3.2 показано движение элемента l в плоскости Π ротора; чтобы не загромождать чертеж, из числа препятствий обозначены фрагмент одного кольца K_4 и орбита одного спутника Cn_2 , расположенные в плоскости экватора Π_1 , со следами K_4 и C_2 их пересечения с плоскостью XOZ .

Рассмотрим движение элемента ротора с массой m и начальной длиной l_0 . При движении ротора длина выделенного элемента увеличивается вследствие раздвижения фрагментов и пропорционально радиусу ротора, масса же остается постоянной:

$$l = l_0 \frac{r \cos \psi}{R \cos \psi_0}, \quad m = \text{const.}$$

Обобщенными координатами элемента являются:

1. Угол φ поворота в плоскости Π , в которой он расположен в данный момент.
2. Расстояние r элемента до центра планеты; в дальнейшем будем рассматривать r как модуль радиус-вектора \vec{r} , отмечающего положение центра масс элемента по отношению к инерциальной системе отсчета $OXYZ$.
3. Угол ψ отклонения \vec{r} от плоскости экватора Π_1 . Начальные значения этих параметров и их производных

$$\varphi_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = \omega_0; \quad r_{p0} = R \cos \psi_0; \quad \dot{r}_{p0} = \omega_0; \quad \psi_0 \neq 0, \quad \dot{\psi}_0 = 0. \quad (3.1)$$

Кинетическая энергия элемента

$$K = \frac{m}{2} (\dot{\varphi}^2 r^2 \cos^2 \psi + \dot{r}^2 + \dot{\psi}^2 r^2).$$

Силы, действующие на выделенный элемент, зависят от режима движения ротора. Во всех трех режимах действует сила притяжения элемента к центру планеты:

$$\vec{G} = mg \frac{R^2}{r^2},$$

где g — гравитационное ускорение в стартовом положении ротора.

Во втором режиме на элемент дополнительно действует внешняя диссипативная сила \vec{P} , которую полагаем приложенной в центре элемента и направленной перпендикулярно радиус-вектору \vec{r} в сторону скорости ψr (рис. 3.1). Сила \vec{P} является также управляющей и подлежит определению из условий маневра по обходу препятствий.

В третьем режиме на элемент дополнительно к \vec{G} действуют силы натяжения \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , возникающие от трения между фрагментами при их фрикционном раздвижении. Эти силы приложены на концах элемента по касательным к ротору и имеют равные величины: $F_1 = F_2 = F_{\text{тр}}$ (рис. 3.2). Их равнодействующая \vec{F} приложена в центре элемента в плоскости ротора Π и направлена по его радиусу к оси OZ ; ее модуль равен $F = 2F_{\text{тр}} \sin \frac{\delta}{2}$, где $\delta = l_0/r_{p0} = r \cos \psi$. Учитывая малость δ и зависимость $r_{p0} = R \cos \psi_0$, можно записать

$$F = F_{\text{тр}} \delta = F_{\text{тр}} \frac{l_0}{R \cos \psi_0}.$$

Обобщенные силы в зависимости от режимов I, II и III движения ротора, принимают значения

$$Q_\varphi = 0; \quad Q_r = \begin{cases} -G; \\ -G; \\ -(G + F \cos \psi); \end{cases} \quad Q_\psi = \begin{cases} 0; & \text{I} \\ Pr; & \text{II} \\ Fr \sin \psi; & \text{III} \end{cases} \quad (3.2)$$

Система дифференциальных уравнений движения элемента ротора имеет вид:

$$\ddot{\varphi} r \cos \psi + 2 \dot{\varphi} \dot{r} \cos \psi - 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} r \sin \psi = 0, \quad (3.3)$$

$$\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r \cos^2 \psi - \dot{\psi}^2 r = \frac{1}{m} Q_r, \quad (3.4)$$

$$\ddot{\psi} + 2\dot{\psi} \frac{\dot{r}}{r} + \dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \psi = \frac{1}{mr^2} Q_{\psi}. \quad (3.5)$$

Координата φ является циклической; соответствующий интеграл имеет смысл закона сохранения кинетического момента ротора относительно оси OZ :

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \frac{R^2 \cos^2 \psi_0}{r^2 \cos^2 \psi} = V_0 \frac{R \cos \psi_0}{r^2 \cos^2 \psi} \quad (3.6)$$

Переходя к безразмерной координате $x = r/R$ и используя обозначения

$$q = \frac{g}{R}, \quad \beta = \frac{V_0^2 \cos^2 \psi_0}{gR} = \frac{V_0^2}{V_1^2} \cos^2 \psi_0, \quad f = \frac{F}{mR}, \quad p = \frac{P}{mR},$$

получаем, с учетом интеграла (3.6), выражений (3.2) и после некоторых преобразований уравнений (3.4) и (3.5):

$$\dot{\psi} = \frac{(q\beta)^{1/2}}{x^2 \cos^2 \psi}, \quad (3.7)$$

$$\ddot{x} = \frac{q}{x^2} \left(\frac{\beta}{x} \frac{1}{\cos^2 \psi} - 1 \right) + \dot{\psi}^2 x - \begin{cases} 0, \\ 0, \\ f \cos \psi. \end{cases}$$

$$\ddot{\psi} = 2\dot{\psi} \frac{\dot{x}}{x} q\beta \frac{\sin \psi}{x^4 \cos^3 \psi} = \begin{cases} 0, \\ 0, \\ \frac{f}{x} \sin \psi. \end{cases}$$

Как уже отмечено, силы P и F не только диссипативные, но и управляют движением ротора: полагаем их и зависящие от них величины P и f функциями координаты x :

$$P = P(x), \quad p = p(x), \quad F_1 = F_1(x), \quad f = f(x).$$

Задачу о маневрировании ротора сведем к определению стартовой скорости V_0 и функций $P(x)$, $F_1(x)$ при условиях: ротор, не столкнув-

шись ни с одним из препятствий, должен выйти в плоскости Π_1 , на орбиту, определяемую заданной координатой x_* , в кольцевой окрестности которой отсутствуют какие-либо препятствия; угловое и радиальное движение должны быть погашены в заданном положении x_* :

$$\psi(x_*) = \dot{\psi}(x_*) = \ddot{\psi}(x_*) = 0; \quad \dot{x}(x_*) = \ddot{x}(x_*) = 0. \quad (3.8)$$

Вторая задача о выводе ротора из зоны притяжения планеты может быть сформулирована, как определение такого значения V_0 , чтобы ротор, пройдя область препятствий и не столкнувшись с ними, покинул зону притяжения планеты. Вводить диссипативные силы в этом случае нет необходимости; более того, они здесь нежелательны, т.к., тормозя движение ротора, приводят к энергетическим потерям.

3.3. Методика решения задачи

Система двух нелинейных дифференциальных уравнений (3.7) относительно координат X и Y , содержит неизвестные пока функции управления $p = p(x)$ и $f = f(x)$. Кроме начальных условий (3.1), имеются конечные условия (3.8).

Наметим методику решения задачи.

1. Ограничиваясь случаем малых значений угла ψ и его первой производной $\dot{\psi}$, линеаризуем уравнение системы (3.7).

2. Переходим к новой независимой переменной — безразмерной радиальной координате x .

3. Определяем схему движения ротора при обходе препятствий и выходе в кольцевую окрестность заданной орбиты. При этом возможно разделение этапов гашения двух движений ротора: сначала гасится движение по углу ψ , затем — радиальное движение по координате x .

Линеаризованные по ψ и $\dot{\psi}$ два последних уравнения системы (3.7) принимают вид

$$\ddot{x} = F(x, 0) - \begin{cases} 0, \\ 0, \\ f\psi/x. \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\ddot{\psi} + 2\dot{\psi} \frac{\dot{x}}{x} + q\beta \frac{\sin \psi}{x^4} = \begin{cases} 0, \\ p/x, \\ f\psi/x. \end{cases} \quad (3.10)$$

Первое уравнение содержит только переменную x и ее вторую производную, а в III режиме — управляющую функцию $f(x)$.

Интегрируя это уравнение с пределами от $x_0 = 1$ до x , получим

$$\dot{x}^2 = \frac{q}{x} (x-1) \left[\beta \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 2 \right] - 2 \int_{x_0}^x f(x) dx, \quad (3.11)$$

где слагаемое, содержащее интеграл, добавляется только на третьем трениионном режиме движения ротора.

Уравнения (3.9) и (3.11) определяют радиальное ускорение \ddot{x} и радиальную скорость \dot{x} в зависимости от положения x ротора (и управления $f(x)$ в III режиме).

Полагаем ψ сложной функцией времени t ; т.е. $\psi = \psi(x(t))$. Тогда

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \psi' \dot{x}, \quad (3.12)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\psi' \dot{x}) = \psi'' \dot{x}^2 + \psi' \ddot{x}, \quad (3.13)$$

где штрихами обозначены производные по x , а точками — производные по t .

Подставляя (3.12), (3.13) в уравнение (3.10), получим

$$\psi'' \dot{x}^2 + \psi' \left(\ddot{x} + 2 \frac{\dot{x}^2}{x} \right) + \psi \frac{q\beta}{x^4} = \begin{cases} 0, \\ p/x, \\ f\psi/x. \end{cases} \quad (3.14)$$

где \ddot{x} и \dot{x}^2 имеют вид (3.9) и (3.11).

Уравнение (3.14) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно $\psi(x)$ с переменными правыми частями, содержащими управляющие параметры $p(x)$ и $f(x)$ на II и III режимах движения ротора.

3.4. Динамика свободного движения ротора. Решение задачи о выводе ротора из зоны притяжения планеты

Первый режим движения ротора — свободный, без диссипативных сил расширения телескопически соединенных фрагментов. В этом случае уравнения (3.9), (3.11) принимают вид:

$$\ddot{x} = \frac{q}{x^3} (\beta - x), \quad \dot{x}^2 = q \frac{x-1}{x^2} [(\beta-2)x + \beta], \quad (3.15)$$

$$x^2 \psi'' [(\beta-2)x^2 + 2x - \beta] +$$

$$+ x \psi' [2(\beta-2)x^2 + 3x - \beta] + \psi \beta = 0. \quad (3.16)$$

Для определения функции $\psi = \psi(x)$ получено линейное дифференциальное уравнение второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Частное решение $\psi_1(x)$ ищем также в виде полинома [9]:

$$\psi_1(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (3.17)$$

степень n которого определяется при подстановке (3.17) в (3.16) и приравнявая нулю коэффициента при старшей степени. Находим $n = -1$, тогда

$$\psi_1 = \frac{1}{x} + a, \quad (3.18)$$

где постоянная $a = -1/\beta$ определяется подстановкой (3.18) в уравнение (3.16).

Второе частное решение имеет вид

$$\psi_2 = \psi_1 - \int \frac{\exp[-\int h(x) dx]}{\psi_1^2(x)} dx$$

где

$$h(x) dx = \frac{2(\beta-2)x^3 + 3x^2 - \beta x}{(\beta-2)x^4 + 2x^3 - \beta x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{du}{u},$$

если знаменатель дроби обозначить $u(x)$. Тогда

$$\int h(x) dx = \frac{1}{2} \ln u,$$

$$\psi_2(x) = \beta^2 \psi_1(x) \int \frac{x dx}{(\beta - x)^2 [(\beta - 2)x^2 + 2x - \beta]^{1/2}} \quad (3.20)$$

Выполнив последовательно замены:

$$\frac{1}{\beta - x} = z, \quad \beta z - 1 = y, \quad y^2 = S,$$

сводим интеграл в (3.20) к табличному

$$\psi_2(x) = \frac{K}{2} \psi_1(x) \int \frac{ds}{(S - b)^{1/2}} = K \psi_1(x) (S - b)^{1/2},$$

где

$$K = \beta^{3/2}(\beta - 1), \quad b = \frac{1}{(\beta - 1)^2}.$$

Продлав замены в обратном порядке, найдем второе частное решение

$$\psi_2(x) = \frac{1}{(\beta - 1)^2} \frac{\beta}{x} \{(x - 1)[(\beta - 2)x + \beta]\}^{1/2}.$$

Общее решение уравнения (3.16) равно линейной комбинации частных решений

$$\psi(x) = C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x),$$

где постоянные C_1, C_2 определяются из начальных условий (3.1):

$$C_1 = \frac{\psi_0 \beta}{\beta - 1}, \quad C_2 = 0$$

Окончательно

$$\psi(x) = \frac{\psi_0}{\beta - 1} \left(\frac{\beta}{x} - 1 \right), \quad x \geq x_0 = 1. \quad (3.21)$$

Таким образом, угол ψ , определяющий в первом режиме движение плоскости ротора Π по отношению к плоскости экватора Π_1 , изменяется по простому закону (3.21).

Определим время движения ротора. Соотношение (3.15) позволяет найти явную зависимость времени движения t от положения x ротора:

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{1}{q^{1/2}} \int_{x_0}^x \frac{x dx}{[(\beta - 2)x^2 + 2x - \beta]^{1/2}}.$$

Результаты интегрирования, зависящие от значения β по отношению к критической величине $\beta_{кр} = 2$, совпадают с выражениями, найденными в гл. 1 и здесь не производятся. Анализ движения ротора, выполненный в п. 1.6 справедлив и здесь с некоторой корректировкой, учитывающей наличие еще одной координаты — угла ψ . Отметим лишь следующее:

1. Постоянная орбита ротора x_* достигается в положение, где $\ddot{x} = 0$:

$$\dot{x} = \beta.$$

2. Необходимая стартовая скорость ротора определяется формулой

$$V_0 = V_1 \frac{\beta^{1/2}}{\cos \psi_0}.$$

Эта величина превышает найденную ранее для экваториального варианта движения ротора и повышается по мере увеличения широтного угла ψ_0 стартовой позиции ротора.

3. Если $\beta < \beta_{кр}$, то ротор совершает колебания относительно положения x_* , с наибольшим удалением от центра планеты

$$x_{**} = \frac{\beta}{2 - \beta} = \frac{x_*}{2 - x_*}. \quad (3.22)$$

4. Если $\beta = \beta_{кр} = 2$, то ротор удаляется на бесконечность, а стартовая скорость зависит от первой и второй космической скоростей:

$$V_0 = V_1 \frac{\sqrt{2}}{\cos \psi_0} = \frac{V_2}{\cos \psi_0}. \quad (3.23)$$

Конечная радиальная скорость в этом случае обращается в нуль: $V_{r\infty} = \dot{x}_\infty R = 0$.

5. Если $\beta > \beta_{кр}$, то ротор также удаляется на бесконечность с конечным значением радиальной скорости:

$$V_{r\infty} = \dot{x}_\infty R = R [q(\beta - 2)]^{1/2} = V_1 (\beta - 2).$$

В последних двух случаях ротор выводится из зоны притяжения планеты, и формула (3.23) определяет минимальное значение необходимой для этого стартовой скорости.

Исследуем движение ротора по углу ψ , описываемое соотношениями (3.21), (3.12) и (3.13).

В случае колебательного движения при $\beta < \beta_{кр}$ в пределах от $x_0 = 1$ до $x_{**} = \frac{2}{2-\beta}$ угол ψ изменяется, согласно (3.21) в пределах от ψ_0 до $\psi_{**} = -\psi_0$. Угловая скорость $\dot{\psi} = \psi' \dot{x}$ в крайних точках обращается в нуль, что следует из того, что $\dot{x}(x_0) = \dot{x}(x_{**}) = 0$; наибольшее по модулю значение достигается в положении $x_* = \beta$:

$$\dot{\psi}(x_*) = -\frac{\psi_0}{\beta} \left(\frac{q}{\beta}\right)^{1/2}.$$

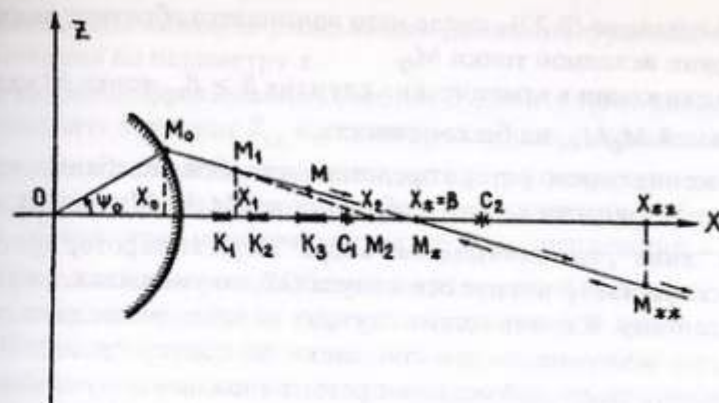
Угловое ускорение $\ddot{\psi} = \psi'' \dot{x}^2 + \psi' \ddot{x}$ после подстановки производных $\psi''(x)$ и $\psi'(x)$ принимает вид

$$\ddot{\psi}(x) = \frac{\psi_0 \beta}{\beta - 1} \frac{2\dot{x}^2 - \ddot{x}x}{x^3}.$$

В точках $x_0 = 1$, $x_* = \beta$, $x_{**} = \frac{\beta}{2-\beta}$ он имеет соответственно значения:

$$-\psi_0 \beta q; \quad 2\psi_0 q (\beta - 1)^2 / \beta^4; \quad \psi_0 q (2 - \beta)^4 / \beta^3.$$

В случаях $\beta = \beta_{кр}$ и $\beta > \beta_{кр}$, при удалении ротора на бесконечность угол ψ имеет предельные значения



3.3. Схема движения характерной точки M . В режиме I — сплошная линия $M_0M_1M_2\dots$; в режиме II — штриховая линия M_1M_2 ; в режиме III — участок M_2M_* .

$$\psi_1(\infty) = -\frac{\psi_0}{\beta_{кр} - 1} = \psi_0, \quad \psi_2(\infty) = \psi_0 \frac{1}{\beta - 1}.$$

при этом угловая скорость и угловое ускорение обращаются в нуль. Введем переменную

$$z = R x \sin \psi \quad (3.24)$$

представляющую собой натуральное значение высоты ротора над плоскостью экватора. Ограничиваясь малыми значениями ψ и линеаризуя (3.24) по ψ , получим с учетом (3.21):

$$z = \frac{\psi_0 R}{\beta - 1} (\beta - x) \quad (3.25)$$

Величина z является также аппликатой точки M пересечения ротора с плоскостью XOZ (рис. 3.1 и 3.3), а зависимость (3.25) — уравнением траектории этой точки. Учитывая малость угла ψ , эта траектория представляет собой прямую с началом в точке M_0 , пересекающую плоскость экватора в единственной точке $x_* = \beta$, где проходит постоянная орбита ротора (рис. 3.3). При свободном движении ротора значения \dot{x} , $\dot{\psi}$, $\dot{\psi}$ в точке x_* не равны нулю, следовательно, точка M проходит положение x_* без остановки. В случае колебательного движения точка M движется вдоль прямой до положения M_{**} с координатой x_{**} , опре-

деляемой согласно (3.22), после чего начинается обратное движение в направлении исходной точки M_0 .

При движении в критических случаях $\beta \geq \beta_{кр}$ точка M удаляется вдоль прямой M_0M_{**} на бесконечность.

Движение самого ротора представляет собой колебания, происходящие на поверхности конуса с образующей $M_0M_*M_{**}$, когда ротор то сползает "вниз", то поднимается "вверх". При этом ротор вращается с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг оси конуса OZ , то уменьшая, то увеличивая ее величину. В критических случаях колебательное движение возникает в неограниченном сползании по конусу "вниз". В случае расположения стартовой позиции ротора в южном полушарии планеты сползание сменяется восхождением по конусу в северное полупространство по отношению к плоскости экватора.

Во всех случаях положение точки x_* должно быть выбрано из условия отсутствия каких-либо препятствий в ее окрестности, точнее, в соответствующей кольцевой части плоскости Π_1 . Выбор $x_* = \beta$ определяет и направление дальнейшего движения ротора со стартовой позиции M_0 через M_* по отношению к экваториальной плоскости. Эта траектория влияет на условие бесконтактного прохождения мимо крупных естественных спутников, расположенных в этой плоскости, а также на условие минимальности корректирующих импульсов при движении фрагментов ротора к назначенной цели.

3.5. Динамика ротора на этапе гашения углового движения

Рассмотрим задачу о маневрировании ротора с целью обхода препятствий и выхода на постоянную орбиту с гашением колебаний. Траектория характерной точки M пересекает плоскость экватора в единственной точке $x_* = \beta$, что имеет принципиальное значение для решения задачи о выполнении условий (3.8). Схема расположения препятствий в экваториальной плоскости позволяет путем задания положения x_* в свободном промежутке обеспечить их обход, перемещая ротор над этой плоскостью. Другая часть задачи — гашение колебаний — может быть решена введением диссипативных сил:

1. Внешние диссипативные силы, влияя на движение центра масс ротора, могут быть использованы для гашения колебаний плоскости ротора по отношению к плоскости экватора, т.е. движения по углу ψ .
2. Внутренние диссипативные силы, в данном случае фрикционные, влияя на взаимные перемещения частей системы, могут быть ис-

пользованы для гашения радиального движения фрагментов ротора, т.е. движения по параметру x .

3. Введение фрикционных сил, как будет показано дальше, позволяет изменить значение $\beta_{кр}$ в сторону увеличения, когда диапазон докритических режимов движения ротора расширяется за пределы $\beta = 2$. Это обстоятельство расширяет возможность выбора орбиты $x_* = \beta$, обеспечивая маневр по обходу любых препятствий.

Процессы гашения колебаний по параметрам ψ и x могут выполняться независимо друг от друга, поочередно или одновременно. В дальнейшем принимаем последовательность трех этапов выхода ротора на орбиту, отличающихся режимами движения; при этом положение ротора определяется параметрами x и ψ , из которых x , как и раньше, является независимым аргументом. Ввиду малости угла ψ радиальную координату $x = r/R$ считаем совпадающей с абсциссой $x = \frac{r}{R} \cos \psi \approx r/R$ характерной точки M .

На первом этапе от начального положения M_0 с координатой x_0 (см. рис. 3.3), до некоторого положения M_1 с координатой x_1 осуществляется свободное, без диссипативных сил движение ротора, т.е. режим I. Здесь ротор набирает радиальную скорость, двигаясь по усеченному конусу с прямолинейной образующей M_0M_1 . Характерная точка M движется по прямолинейному участку M_0M_1 ; положение x_1 определим ниже.

На втором этапе — от положения M_1 до положения M_2 с координатой x_2 — реализуется режим II движения ротора, когда участвуют внешние диссипативные силы. Положение M_2 определяется на оси X на том же свободном от препятствий участке, что и точка M_* орбиты, при этом $x_2 < x_*$. На рис. 3.3 точки M_2 и M_* выбраны на участке между орбитами C_1 и C_2 двух спутников. Координата точки M_1 выбирается в промежутке $[x_0, x_2]$. Траекторией характерной точки M является кривая M_1M_2 , отмеченная штрихами.

Целью движения на этапе II является гашение движения по углу ψ с выполнением к концу этапа условий

$$\psi(x_2) = \dot{\psi}(x_2) = \ddot{\psi}(x_2) = 0.$$

В плоскости экватора от положения M_2 до конечного положения осуществляется режим III движения ротора с участием фрикционных сил. Цель этого движения — гашение радиального движения по координате x с выполнением условий в конце этапа

$$\dot{x}(x_*) = \ddot{x}(x_*) = 0.$$

Радиальное движение на этапе I описывается соотношениями (3.15); угловое движение по ψ — соотношениями (3.12), (3.13) и (3.21). В конце первого и начале второго этапов величины ψ и ψ' принимают в точке x_1 значения

$$\psi(x_1) = \frac{\psi_0}{\beta - 1} \left(\frac{\beta}{x_1} - 1 \right), \quad \psi'(x_1) = -\frac{\psi_0}{\beta - 1} \frac{\beta}{x_1^2}. \quad (3.26)$$

Рассмотрим динамику ротора на втором этапе $[x_1, x_2]$. Дифференциальные уравнения движения в этом случае имеют вид вторых соотношений (3.9) и (3.10).

$$\ddot{x} = \frac{q}{x^2} \left(\frac{\beta}{x} - 1 \right), \quad \dot{\psi} + 2\psi \frac{\dot{x}}{x} + \psi \frac{q\beta}{x^4} = \frac{p(x)}{x}.$$

Первое уравнение имеет интеграл

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_1^2 + \frac{q}{xx_1} (x - x_1) \left(\beta \frac{x + x_1}{xx_1} - 2 \right), \quad (3.27)$$

где \dot{x}_1 — радиальная скорость ротора в положении x_1 , определяемая, согласно (3.15).

Второе уравнение используем для определения управляющего параметра $p(x)$ путем задания зависимости $\psi = \psi(x)$, удовлетворяющей следующим крайним условиям.

1. Совпадение ψ и ψ' со значениями (3.26) в точке, обеспечивающее гладкое сочетание угла ψ на первом и втором этапах.
2. Обращение в нуль ψ , $\dot{\psi}$ и $\ddot{\psi}$ в точке x_2 , т.е. выполнение условий гашения углового движения по ψ .

Этим условиям можно удовлетворить, задавая угол ψ на участке $[x_1, x_2]$ следующим образом:

$$\psi(x) = (x_2 - x)^3 (ax + b), \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (3.28)$$

Производные этой функции имеют вид

$$\psi' = -(x_2 - x)^2 (4ax - ax_2 + 3b),$$

$$\psi'' = 2(x_2 - x)(6ax - 3ax_2 + 3b). \quad (3.29)$$

Первые множители в правых частях (3.28) и (3.29) с учетом (3.12), (3.13) обеспечивают выполнение условий гашения движения по углу ψ . Вторые множители, с неопределенными коэффициентами a и b , используются для выполнения условий сопряжения в точке x_1 . Приравняв ψ в (3.28) и ψ' в (3.29) значениям в (3.26), находим:

$$a = \frac{\psi_0}{\beta - 1} \frac{\beta(4x_1 - x_2) - 3x_1^2}{x_1^2(x_2 - x_1)^4},$$

$$b = -\frac{\psi_0}{\beta - 1} \frac{(5\beta + x_2)x_1 - 2\beta x_2 - 4x_1^2}{x_1(x_2 - x_1)^4}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $p(x)$ имеет структуру $p(x) = q(x_2 - x)p_1(x)$, что обеспечивает ее обращение в нуль в точке $x = x_2$ вместе с углом ψ и его производными. Внешняя сила, необходимая для обеспечения процесса гашения по углу ψ :

$$P(x) = mR p(x).$$

Выбирая концевые точки M_1 и M_2 исследуемого этапа, можно определить траекторию характерной точки M в зависимости от числа, вида, расположения и размеров препятствий, величины свободного промежутка и т.д. Точку M_1 с координатами x_1, z_1 , можно выбрать произвольно, но, чем ближе она к исходной точке M_0 , тем меньше необходима внешняя диссипативная сила $P(x)$; в принципе точка M_1 может совпадать с точкой M_0 . Точка $M_2(x_2, z_2 = 0)$ выбирается в том же свободном промежутке, что и точка орбиты $M_*(x_*, z_* = 0)$ так, чтобы расстояние от точки M до ближайшего препятствия было достаточно большое, превышающее возможные размеры препятствия.

При наличии дискретных препятствий в виде спутников или станций, плоскости орбит которых отличаются от экваториальной, возможен следующий способ их преодоления ротором. В момент пересечения ротором орбиты какого-либо объекта сам этот объект должен находиться в другом месте орбиты, по одну или по другую сторону от плоскости ротора. Для преодоления системы таких объектов следует рассчитать оптимальный, с учетом их положения и движения, момент начала движения ротора, с тем, чтобы ротор последовательно пересекал орбиты этих объектов с выполнением того же условия.

3.6. Движение ротора на этапе гашения радиального движения

Движение ротора на заключительном этапе $[x_2, x_*]$, где гасится радиальное движение, происходит в режиме III, при котором в качестве диссипативных сил используются фрикционные силы. Уравнение движения и его интеграл имеют вид:

$$\ddot{x} = q \frac{\beta - x}{x^3} - f(x), \quad x_2 \leq x \leq x_*; \quad (3.30)$$

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_2^2 + \frac{q}{xx_2} (x - x_2) \left(\beta \frac{x + x_2}{xx_2} - 2 \right) - 2 \int_{x_2}^x f(x) dx, \quad (3.31)$$

где $f(x)$ — управляющий параметр, \dot{x}^2 — радиальная скорость в конце предыдущего участка, определяемая согласно (3.27) при $x = x_2$.

Управляющий параметр находим из условий гашения радиального движения в положении $x_* = \beta$:

$$\ddot{x}(x_*) = 0; \quad \dot{x}(x_*) = 0. \quad (3.32)$$

Из (3.30) и первого условия (3.32) следует, что в точке x_* параметр $f(x)$ также обращается в нуль: $f(x_*) = 0$. Ищем $f(x)$ в виде линейной функции

$$f(x) = (x_* - x)f_* = (\beta - x)f_*. \quad (3.33)$$

Подставляя это выражение в (3.30) и (3.31), получаем уравнения движения ротора на заключительном этапе:

$$\ddot{x} = (\beta - x) \left(\frac{q}{x^3} - f_* \right), \quad (3.34)$$

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_2^2 + (x - x_2) \left[\frac{q}{xx_2} \left(\beta \frac{x + x_2}{xx_2} - 2 \right) - f_* (2\beta - x_2 - x_*) \right]. \quad (3.35)$$

Множитель f_* определяется с помощью второго условия (3.32):

$$f_* = \frac{\dot{x}_2^2}{(\beta - x_2)^2} + \frac{q}{\beta x_2^2}. \quad (3.36)$$

Первое слагаемое зависит здесь от радиальной скорости \dot{x}_2 в точке x_2 и от расстояния точки x_2 до точки орбиты $x_* = \beta$: чем меньше x_2 , тем меньше \dot{x}_2 и больше разность $\beta - x_2$ при фиксированном β и тем меньше первое слагаемое. Напротив, второе слагаемое увеличивается при уменьшении x_2 .

Функция f_* имеет минимум, зависящий от выбора точки x_2 . Учитывая зависимость \dot{x}_2^2 в (3.27) от x_2 , получим путем приравнивания нулю производной $\frac{df_*}{dx_2}$ кубическое уравнение для определения x_2 , зависящее, в свою очередь, от выбора точки x_1 :

$$x_2^3 \dot{x}_1^2 + q \left[\beta x_2 \left(\frac{x_2^2}{x_1^2} - 1 \right) - 2x_2^2 \left(\frac{x_2}{x_1} - 1 \right) + (\beta - x_2)^2 + \frac{2x_2}{\beta} - 1 \right] = 0.$$

Здесь x_1 и \dot{x}_1 полагаем фиксированными; для случая $x_1 = x_0 = 1$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_0 = 0$ уравнение упрощается:

$$(\beta - 2)x_2^3 + 3x_2^2 + \left(\frac{2}{\beta} - 3\beta \right)x_2 + \beta^2 - 1 = 0.$$

Анализ этих уравнений не приводится.

Определенную, согласно (3.36) функцию f_* подставляем в зависимость (3.33) для управляющего параметра $f(x)$, обеспечивающего выполнение условий (3.32) гашения радиального движения в конце исследуемого этапа. Динамика ротора на этом этапе определяется соотношениями (3.34) и (3.35). Значение силы трения $F_{тр}(x)$, необходимой для обеспечения процесса:

$$F_{тр}(x) = mR^2 f(x) \cos \dot{\psi}_0 / l_0.$$

Таким образом, получено решение задачи о маневре ротора при обходе группы препятствий и выходе его на заданную постоянную орбиту в экваториальной плоскости с гашением колебаний.

3.7. Задачи о маневрировании ротора в условиях Урана и Сатурна

В качестве примеров преодоления ротором произвольной системы препятствий рассмотрим задачи о маневре в условиях Урана и Сатурна.

1. Планета Уран имеет десять колец, расположенных компактной группой. Из них восемь, в том числе последнее, имеют заметный эксцентриситет, т.е. форму эллипса; семь колец имеют малое отклонение от экваториальной плоскости.

В табл. 3.1 приведены значения радиусов колец R_i , i — номер кольца, их относительных величин $x_i = R_i/R$, где $R = 26200$ км — радиус Урана, и относительных расстояний между кольцами $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Как следует из таблицы, вся группа колец лежит в границах $[1,58; 1,98]$ откладываемой вдоль оси X инерциальной системы отсчета. Расстояние между кольцами не превышает 0,084, что соответствует 200 км. Учитывая эллиптичность колец, этот промежуток мал для безопасного вывода ротора на орбиту в зоне колец.

Кроме колец, в 1986 году открыта группа десяти малых спутников Урана; орбита одного из них расположена между восьмым и девятым кольцами, остальные движутся выше зоны колец, в пределах относительных радиусов 2,05; 3,28 (табл. 3.2). Последний спутник наиболее крупный, его диаметр 165 км; остальные — от 25 до 100 км; расстояния между ними составляют 10800—5000 км.

Таблица 3.1
Радиусы и взаимное положение колец Урана

№ п/п	Радиус R_i (км)	Относительный радиус x_i	Разность высот $\Delta x = x_i - x_{i-1}$
1	41600	1,58777	0,58777
2	42000	1,60306	0,01529
3	42400	1,61831	0,01525
4	44600	1,70227	0,08396
5	45600	1,74044	0,03817
6	47200	1,80151	0,06107
7	47600	1,81678	0,01527
8	48400	1,84731	0,03053
9	50200	1,91601	0,06870
10	51800	1,97708	0,06107

Первый из ранее известных спутников — Миранда — имеет диаметр 483 км и радиус орбиты 129000 км, табл. 3.2, № 11, $x_{11} = 4,92$. Между ним и десятым малым спутником имеется большой промежуток кольцевой формы шириной $\Delta x = 1,64$ или 43000 км, свободный, как считается, от колец и спутников.

Задаем орбиту в этом промежутке в положении $x_* = \beta = 4,6$; т.е. примерно на 2/3 расстояния между десятым и одиннадцатым спутниками.

Стартовая скорость ротора, необходимая для достижения заданной орбиты,

$$V_0 = V_1 \sqrt{\beta} / \cos \psi_0 = 25,58 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 35,58 \text{ км/с},$$

где $\psi_0 = 0,1$ — значение угла, определяющего положение стартовой плоскости Π_0 ротора по отношению к экватору; $V_1 = (qR)^{1/2} = 16,5$ км/с, $V_2 = V_1 \sqrt{2} = 23$ км/с — соответственно первая и вторая космические скорости на Уране; $g = 10,4 \text{ м/с}^2$ — ускорение силы тяжести на поверхности Урана, $R = 2,62 \cdot 10^7 \text{ м}$ — радиус экватора.

Таблица 3.2
Радиусы орбит и взаимное положение первых 11 спутников Урана

№ п/п	Радиус R_i (км)	Относительный радиус x_i	Разность высот $\Delta x = x_i - x_{i-1}$	Выбранные значения x_2, x_*
1	49750	1,89846	0,05115	
2	53770	2,05187	0,07479	
3	59160	2,25755	0,20568	
4	61770	2,35714	0,09959	
5	62650	2,39072	0,03358	
6	64630	2,46628	0,07656	
7	66100	2,52238	0,05610	
8	69930	2,66853	0,14615	
9	75200	2,86963	0,20110	
10	86000	3,28176	0,41213	$x_2 = 4,0$
11	129000	4,92367	1,64191	$x_* = 4,6$

Примечания к таблицам 3.1 и 3.2

1. Разность $\Delta x = x_1 - x_0 = 0,58777$ представляет собой относительное расстояние первого кольца от поверхности планеты.
2. Первый спутник находится между 8 и 9-м кольцами, второй — выше 10-го, величина Δx для них представляет собой разность высот 8-го кольца и 1-го спутника, 10-го кольца и 2-го спутника.

Для точки M_2 , где ротор должен выйти в экваториальную плоскость, погасив при этом угловое движение по ψ , принимаем $x_2 = 4,0$, т.е. за пределами группы десяти колец и десяти малых спутников. Для точки M_1 , где начинается второй этап движения с участием внешних диссипативных сил, принимаем $x_1 = 1,9$, т.е. на участке между 8 и 9-м кольцами (табл. 3.1).

Таким образом, задаваемая схема движения ротора такова. Начиная движение из положения M_0 на поверхности Урана, определяемом широтой $\psi_0 = 0,1$, ротор на участке $[x_0, x_1]$ совершает свободное движение. На участке $[x_1, x_2]$ совершается управляемое движение во втором режиме с целью погасить угловое движение по ψ ; на этих двух участках ротор проходит над плоскостью экватора на высоте $z = R\psi x$, преодолевая тем самым системы всех десяти колец и десяти малых спутников Урана.

На последнем участке $[x_2, x_*$] ротор движется в плоскости экватора; здесь с помощью фрикционных сил происходит гашение радиальной части движения и выход на постоянную орбиту $x_* = \beta = 4,6$.

Исходные данные задачи, некоторые результаты, графики и их анализ приводятся ниже, см. пункт 3.

2. Из планет-гигантов Солнечной системы Сатурн имеет наиболее внушительную и сложную систему колец и спутников. Система главных колец D, C, B, A, F, G, E фактически состоит из большого числа отдельных, более узких, а также множества промежуточных невидимых с Земли колец и составляет почти сплошное кольцо, простирающееся едва ли не от атмосферы планеты до расстояния $8R$, где $R = 6,01 \cdot 10^7$ м — радиус Сатурна. В относительных величинах R_i/R это соответствует интервалу [1; 8].

В промежутках между отдельными кольцами, составляющими внешние системы колец G и E , движутся 12 малых спутников Сатурна. Первый большой спутник Рея, находящийся за пределами колец, имеет относительный радиус орбиты $x = 8,5$; затем следует большой, шириной $\Delta x = 11,5$, свободный кольцевой промежуток до наиболее крупного спутника Титана с относительным радиусом орбиты $x = 20$.

Не рассматривая отдельные кольца системы, их радиусы, интервалы между ними, а также движущиеся среди них малые спутники, поставим задачу о выводе ротора ОТС в указанный выше большой промежуток между спутниками Реей и Титаном. Для этого полагаем: $x_1 = 3,0$; $x_2 = 9,0$; $x_* = \beta = 15,0$.

Соответствующая стартовая скорость ротора $V_0 = 83$ км/с, при этом по-прежнему $\psi_0 = 0,1$. Ускорение силы тяжести на Сатурне $g = 9,54$ м/с², первая и вторая космические скорости $V_1 = 24$ км/с, $V_2 = 34$ км/с. Все эти

Таблица 3.3
Постоянные в задаче о маневрировании ротора в условиях Урана и Сатурна

Планета	R , км	g , м/с ²	m_1 , кг	x_1	x_2	x_*	Δx
Уран	26200	10,4	100	1,9	3,6	4,6	0,1
Сатурн	60100	9,54	100	3,0	9,0	15,0	0,25

величины вычисляются как сумма переносной скорости от вращательного движения Сатурна и относительной скорости (по отношению к точкам стартовой позиции): $V_a = V_e + V_r$, где $V_e = R \Omega \cos \psi_0 \approx 10$ км/с, $\Omega = 1,68 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹ — угловая скорость Сатурна. Составляющие

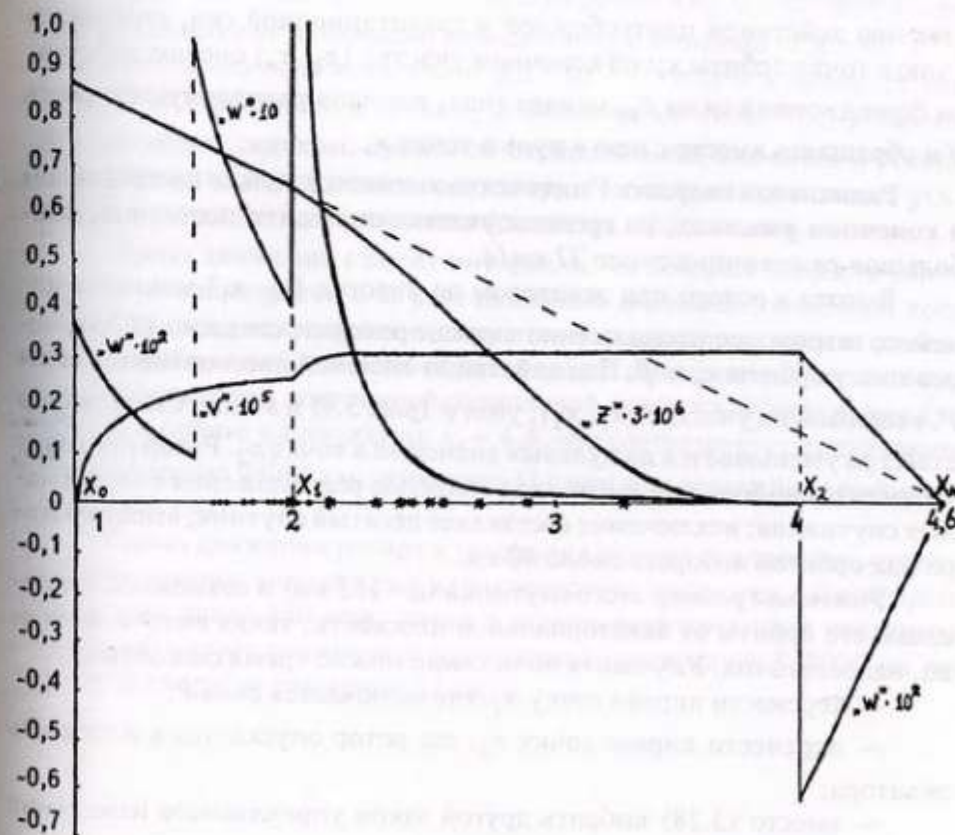


Рис. 3.4. Графики радиальной скорости V , радиального ускорения W и высоты ротора Z в условиях Урана

приведенных выше скоростей, достигаемые при разгоне ротора, составляют соответственно 73 км/с, 14 км/с и 24 км/с.

3. Результаты решения задач на ЭВМ. В табл. 3.3 приведены значения постоянных в условиях задач; здесь m и Δx — масса единицы длины ротора и шаг вычислений; остальные величины пояснены в п.п. 1 и 2.

На рис. 3.4 показана зависимость динамических характеристик ротора при движении в условиях Урана от безразмерной радиальной координаты x . Положение колец и десяти малых спутников обозначены на оси X жирными точками (следы от пересечения кольцами вертикальной плоскости XOY) и звездочками (следы от пересечения той же плоскости орбитами спутников).

Величины, имеющие разный порядок, приведены на графиках в безразмерном виде и специальных масштабах, которые приводят безразмерные аналоги к одному порядку. Связь безразмерных аналогов с истинными величинами пояснена в подрисуночных текстах.

Радиальное ускорение W на участках $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ изменяется под действием центробежной и гравитационной сил, стремясь к нулю в точке орбиты x_* ; на конечном участке $[x_2, x_*$] оно под действием фрикционной силы $F_{тр}$ меняет знак, погашая радиальную скорость V и обращаясь вместе с нею в нуль в точке x_* .

Радиальная скорость V интенсивно меняется только на начальном и конечном участках, на среднем участке она почти постоянна; наибольшая ее величина около 27 км/с.

Высота z ротора над экватором на участке $[x_0, x_1]$ меняется линейно; штриховое продолжение линии проходит, согласно (3.25), через точку орбиты $x_* = \beta$. Под действием внешней диссипативной силы P , вводимой на участке $[x_1, x_2]$, угол ψ (рис. 3.4) и вместе с ним высота z быстро уменьшается до нулевых значений в точке x_2 . Ротор проходит на достаточно большой высоте над областью расположения колец и малых спутников; исключение составляет десятый спутник, высота ротора над орбитой которого около 40 км.

Учитывая размер этого спутника ($d = 165$ км) и возможное отклонение его орбиты от экваториальной плоскости, такая высота, конечно, недостаточна. Улучшить положение можно тремя способами:

- перенести вправо точку x_1 , где включается сила P ;
- перенести вправо точку x_2 , где ротор опускается в плоскость экватора;
- вместо (3.28) выбрать другой закон управляемого изменения угла ψ и высоты z .

Диссипативная сила $P(x)$, управляющая движением по углу ψ и высоте z и приходящая на единицу длины ротора, имеет наибольшие

значения около 300 Н и меняет знак в положении $x = 2,5$. Это является, очевидно, следствием заданного закона (3.28) изменения угла ψ ; возможно, что при другом законе сила $P(x)$ будет знакопостоянна, монотонно уменьшая свои значения.

Фрикционная диссипативная сила $F_{тр}(x)$, представляющая собой сумму сил трения и равная силе натяжения фрагмента, изменяется, согласно (3.33), линейно, принимая, в общем случае, большие значения. Причина этого — очень малая кривизна элементов ротора, поэтому силы натяжения, направленные по касательным в конечных точках элемента, имеют очень малую величину равнодействующей, которая направлена по радиусу и должна тормозить радиальное движение. Чтобы уменьшить величину $F_{тр}$, можно вводить эту силу с момента старта ротора в положении x_0 , а также использовать гравитационное торможение (подъем и поэтапное сбрасывание частей оболочки) и другие диссипативные силы, в том числе внешние.

На участке свободного расширения ротора $[x_0, x_1]$ угловое ускорение $\dot{\psi}$ меняется от начального отрицательного значения $-1,83 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-2}$ до максимального положительного $0,37 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-2}$ и затем начинает убывать. При включении в точке x_1 диссипативной силы $P(x)$ ускорение $\dot{\psi}$ изменяется скачком, принимая отрицательные значения и ускоряя движение плоскости ротора к экватору. После изменения знака ускорения в точке $x = 2,2$ движение тормозится и погашается в точке x_1 .

Время движения t имеет интервалы, на которых скорость значительно увеличивается в начале движения и в конце движения, когда она начинает уменьшаться; между этими интервалами время t изменяется линейно в зависимости от радиального расстояния x , что является следствием почти постоянной радиальной скорости. Общее время движения к орбите в положении $x_* = 4,6$, что соответствует радиальному перемещению 94000 км, достигает 111 мин при средней скорости движения 14 км/с.

Схема движения ротора в условиях Сатурна аналогична, отличаясь числовыми значениями характеристик; например, общее время движения равно 430 мин, почти в четыре раза превышая указанную выше величину; радиальное перемещение составляет 840000 км при средней скорости движения 32 км/с.