

СТРУННЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ НА ЗЕМЛЕ И В КОСМОСЕ

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РАСЧЕТНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ МОДУЛЕЙ ПО СТРУННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЛИНИИ*

4.1. Вывод уравнений движения струнной транспортной системы

В этом разделе на основании достаточно общих допущений относительно конструкции СТС получена система уравнений, описывающая совместное движение струнной транспортной линии (СТЛ) и транспортных модулей. Учет характерных особенностей задачи позволил построить процедуру последовательных приближений решения этой системы, причем первым приближением является решение задачи о движении по СТЛ безынерционных нагрузок. Из результатов главы в качестве частных случаев получаются, например, постановки задач о колебаниях упругих балок под действием подвижных нагрузок [35].

Рассмотрим горизонтальную СТС с числом пролетов N_0 . Длина каждого пролета равна l_0 . Предполагается, что система состоит из двух одинаковых параллельных струнных транспортных линий (СТЛ), по которым движутся транспортные модули (ТМ). Основными элементами, из которых состоит СТЛ, являются (рис. 4.1):

- а) тонкостенный металлический корпус 1 коробчатого сечения (в общем случае переменной площади за счет изменения внешних размеров; внутренние размеры корпуса постоянны);
- б) предварительно напряженные (натянутые) элементы 2 и 3, слабо сопротивляющиеся изгибу, которые в дальнейшем будем называть соответственно верхней и нижней струнами;

* В основу главы 4 положены материалы научных отчетов "Исследования движения транспорта по гибкому мосту" и "Некоторые вопросы динамики струнной транспортной системы", выполненные в 1994 г. в г. Минске по заказу фирмы "NTL GmbH" авторским коллективом в составе: Вярвильская О.Н., Козловский Н.И., Савенков В.А., Савчук В.П. и Юницкий А.Э.

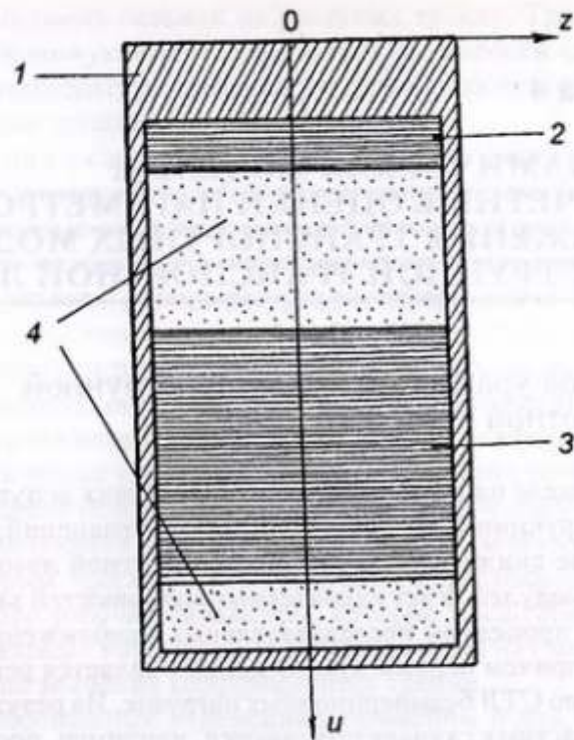


Рис. 4.1

в) наполнитель 4 — сплошная среда, занимающая объем внутри корпуса.

Элементы 2, 3 названы струнами, так как каждый из них состоит из большого числа предварительно натянутых и не связанных между собой тонких и гибких слоев (проволок), заключенных в общий гибкий корпус (трение между слоями отсутствует благодаря разделяющей их смазке). Наполнитель будем считать средой, обладающей упругими и диссипативными свойствами, малой плотностью по сравнению с плотностью струн и корпуса СТЛ. На этом основании, отнеся массу наполнителя к массе корпуса, будем считать наполнитель невесомой связью между элементами линии. Считаем, что каждая линия имеет продольную вертикальную плоскость симметрии и подвергается действию лишь вертикальных нагрузок, лежащих в этой плоскости. Динамические условия, в которых находятся линии, предполагаются одинаковыми. При этих предположениях можно ограничиться рассмотрением вертикальных колебаний сечения СТЛ в плоскости симметрии под действием движущихся нагрузок. Заметим, что этот вывод справедлив и в том случае, когда линии симметричны относительно вертикальной

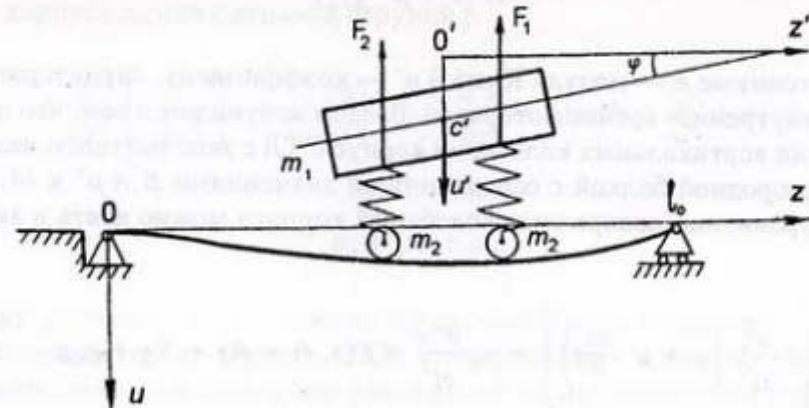


Рис. 4.2

оси плоскости и связаны между собой так, что точки линий движутся только в вертикальных плоскостях. В дальнейшем при анализе колебаний линии или пролета будем подразумевать вертикальные колебания указанного сечения в плоскости zOu (рис. 4.2).

Пусть транспортный модуль (ТМ) представляет собой тележку, имеющую платформу массой $2m_1$ и четыре равномерно нагруженные в состоянии покоя колеса массой m_2 каждое. Амортизатор (подвеска колеса) моделируется пружиной с жесткостью c и параллельно включенным демпфером, рабочее усилие которого пропорционально с коэффициентом ν скорости изменения длины пружины. Расстояние между осями передних и задних колес тележки, когда она находится на горизонтальной поверхности, обозначим l_1 . Отсчет времени ведется с момента $t = 0$, когда переднее колесо первого транспортного модуля въезжает с разгонного участка на первый пролет покоящейся СТЛ.

4.1.1. Вывод уравнений колебаний СТЛ

Для получения системы уравнений, описывающих колебания СТЛ, необходимо записать уравнения движения элементов линии с учетом связей между ними.

1. Уравнение колебаний корпуса СТЛ. Получим уравнение изгибных вертикальных колебаний корпуса СТЛ с наполнителем. Будем считать, что для материала корпуса и для наполнителя зависимость нормального напряжения σ от относительной деформации ϵ дается формулой

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \mu' \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad (4.1)$$

где постоянные E — модуль Юнга и μ' — коэффициент, характеризующий внутреннее трение материала. Введем допущение о том, что при изучении вертикальных колебаний корпус СТЛ с заполнителем является однородной балкой с осредненными значениями E и μ' в (4.1). Тогда уравнение поперечных колебаний корпуса можно взять в виде [35]:

$$E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[I \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u + \mu' \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] + \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(z, t) + R_1 + R_2 + \rho_0 g. \quad (4.2)$$

Здесь $u(z, t)$ — прогиб, $I(z)$ — момент инерции поперечного сечения, $\rho(z)$ — линейная плотность корпуса с заполнителем, $f(z, t)$ — интенсивность внешней нагрузки на корпус без учета силы тяжести, $R_1(z, t)$, $R_2(z, t)$ — интенсивность воздействия на корпус верхней и нижней струн соответственно, g — ускорение свободного падения.

В силу введенных допущений уравнения движения верхней и нижней струн запишутся в виде:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - T_1 \frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2} = f_1(z, t) - R_1 + R_{21} + \rho_1 g, \quad (4.3)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} - T_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2} = f_2(z, t) - R_2 - R_{21} + \rho_2 g. \quad (4.4)$$

Здесь y_1, y_2 — прогибы соответствующих струн, ρ_1, ρ_2 — линейные плотности, T_1, T_2 — натяжения, f_1, f_2 — интенсивности внешних нагрузок, относящиеся к верхней и нижней струнам соответственно, R_{21} — интенсивность воздействия нижней струны на верхнюю.

Для получения уравнения колебаний СТЛ в общем случае будем считать корпус верхней струны скрепленным с корпусом линии

$$y_1(z, t) = u(z, t) \quad (4.5)$$

Тогда можно положить

$$f_1(z, t) = 0; \quad R_{21}(z, t) = 0 \quad (4.6)$$

и после сложения уравнений (4.2), (4.3) получить уравнение движения корпуса линии с верхней струной

$$E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[I \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u + \mu' \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(z, t) + R_2 + \rho_s g, \quad (4.7)$$

где

$$\rho_s = \rho_1 + \rho_0.$$

Предположим, что нижняя струна может перемещаться по вертикали относительно корпуса СТЛ, взаимодействуя с ним посредством заполнителя, а в состоянии равновесия воспринимает нагрузку не только от собственного веса, но также от веса корпуса с заполнителем и верхней струной, т.е.

$$R_2 = R_2^{din} - \rho_s g, \quad (4.8)$$

где $R_2^{din}(x, t)$ — динамическая составляющая воздействия нижней струны на корпус.

На рисунке 4.3 изображена СТЛ без транспортных модулей в положении равновесия, $y_{20}(z)$ — статический прогиб нижней струны.

Поскольку напряжения и деформации заполнителя в направлении оси Ou удовлетворяют равенству (4.1), то R_2^{din} запишется так

$$R_2^{din} = E_w a \left(1 + \mu_w \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{y_2 - u - y_{20}}{h_1 + y_{20}} + E_n a \left(1 + \mu_n \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{y_2 - u - y_{20}}{h_2 + y_{20}}, \quad (4.9)$$

где E_w, μ_w, E_n, μ_n — постоянные, характеризующие заполнитель над струной и под ней соответственно, a — ширина заполнителя.

В практически важных случаях максимальное значение статического прогиба y_{20}^{max} не превышает нескольких сантиметров. Поэтому, учитывая малое изменение статического прогиба вдоль пролета, заменим y_{20} в знаменателях равенства (4.9) его средним значением $0,5 y_{20}^{max}$ и введем функцию

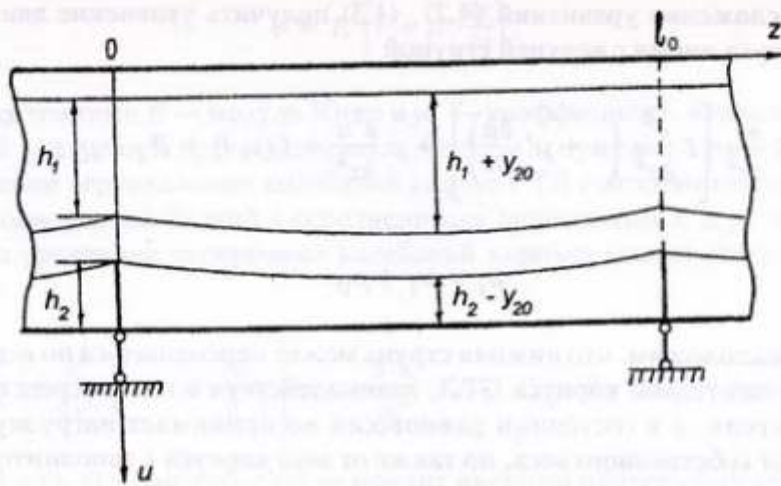


Рис. 4.3

$$u_2(z, t) = y_2(z, t) - y_{20}(z, t). \quad (4.10)$$

Функция $u_2(x, t)$ описывает прогиб нижней струны относительно ее равновесного положения. Тогда равенство (4.9) можно записать

$$R_2^{din} = E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u_2 - u). \quad (4.11)$$

Здесь

$$E_2 = \frac{aE_w}{h_1 + 0,5y_{20}^{max}} + \frac{aE_n}{h_1 - 0,5y_{20}^{max}},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{E_2} \left(\frac{a\mu_w E_w}{h_1 + 0,5y_{20}^{max}} + \frac{a\mu_n E_n}{h_2 - 0,5y_{20}^{max}} \right). \quad (4.12)$$

С учетом равенств (4.10), (4.11) уравнения (4.4), (4.7) принимают вид

$$E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[I(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u + \mu' \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] + \rho_s(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_1(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u - u_2) = f(z, t), \quad (4.13)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - T_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u_2 - u) = f_2(z, t).$$

Уравнения (4.13) представляют собой систему уравнений, описывающих движение линии с переменной площадью поперечного сечения корпуса относительно положения равновесия.

Полученные зависимости позволяют рассмотреть несколько практически важных частных случаев.

Случай 1. Если площадь сечения корпуса не меняется по длине балки, то I, ρ_s — константы и уравнения (4.13) принимают вид

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \mu' EI \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial z^4} + \rho_s(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u - u_2) = f(z, t), \quad (4.14)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - T_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u_2 - u) = f_2(z, t).$$

Случай 2. Соответствует высокой жесткости заполнителя или ситуации, когда при максимальном прогибе нижняя струна касается жесткого корпуса.

Сложим уравнения (4.14) и перейдем к пределу при $E_2 \rightarrow \infty$. Тогда из второго уравнения получим $u_2 = u$, и система (4.14) сведется к одному уравнению

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \mu' EI \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial z^4} + \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (T_1 + T_2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(z, t), \quad (4.15)$$

описывающему движение СТЛ с постоянным сечением корпуса и двумя скрепленными с ним струнами.

Случай 3. Если жесткостью корпуса линии и его плотностью можно пренебречь, то из (4.15) получим уравнение

$$\rho' \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = T' \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(z, t), \quad (4.16)$$

где

$$\rho' = \rho_1 + \rho_2, \quad T' = T_1 + T_2$$

Уравнение (4.16) описывает колебания гибкой СТЛ, струны которой связаны таким образом, что измеряемые по вертикали расстояния между ними неизменны в процессе движения.

4.1.2. Уравнения движения транспортного модуля по СТЛ

Движение транспортного модуля будем рассматривать по отношению к системе $O'z'u'$ (рис. 4.2), движущейся с постоянной скоростью v в направлении оси $O'z'$. Расстояние между осями Oz и $O'z'$ равно высоте центра масс платформы модуля над базовой горизонтальной плоскостью.

Получим уравнения движения одиночного ТМ, въезжающего на СТЛ в момент времени $t = 0$. Будем считать, что колеса ТМ не теряют контакта с поверхностью линии. Тогда уравнениями движения ТМ будут уравнения плоскопараллельного движения его платформы, которые запишутся так:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 U}{dt^2} &= -F_1 - F_2 + m_1 g, \\ I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \text{mom}_{c'} \bar{F}_1 + \text{mom}_{c'} \bar{F}_2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь $U = O'C'$, φ — угол наклона оси платформы, I_c — момент инерции платформы относительно центра масс C' ; \bar{F}_1, \bar{F}_2 — силы реакции амортизаторов, действующие на платформу. Предполагаем, что центр масс находится в середине платформы. Силы \bar{F}_1, \bar{F}_2 можно выразить через динамические сжатия пружин:

$$F_1 = \left(c + v \frac{d}{dt} \right) \left[U - 0,5l_1 \varphi - u(vt, t) \sigma \left(0, N_0 \frac{l_0}{v} \right) \right] + 0,5m_1 g, \quad (4.18)$$

$$F_2 = \left(c + v \frac{d}{dt} \right) \left[U - 0,5l_1 \varphi - u(vt - l_1, t) \sigma \left(\frac{l_1}{v}, \frac{N_0 l_0 + l_1}{v} \right) \right] +$$

+ 0,5m₁g.

В выражениях (4.18) учтено, что при движении платформы угол φ будет мал и введена функция времени

$$\sigma(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & t \in [t_1, t_2] \\ 0, & t \notin [t_1, t_2] \end{cases} \quad (4.19)$$

С учетом равенств (4.18) запишем в виде

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 U}{dt^2} + 2v \frac{dU}{dt} + 2cU &= \left(c + v \frac{d}{dt} \right) \times \\ &\times \left[u(vt, t) \sigma \left(0, N_0 \frac{l_0}{v} \right) + u(vt - l_1, t) \sigma \left(\frac{l_1}{v}, \frac{N_0 l_0 + l_1}{v} \right) \right], \\ I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 0,5v l_1^2 \frac{d\varphi}{dt} + 0,5cl_1^2 \varphi &= 0,5l_1 \left(c + v \frac{d}{dt} \right) \times \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\times \left[u(vt - l_1, t) \sigma \left(\frac{l_1}{v}, \frac{N_0 l_0 + l_0}{v} \right) + u(vt - l_1, t) \sigma \left(0, N_0 \frac{l_0}{v} \right) \right].$$

Таким образом, полученная система уравнений описывает движение одиночного транспортного модуля по N_0 -пролетной СТЛ.

Уравнения (4.20) движения одиночного модуля можно легко обобщить и получить уравнения движения модуля с номером $i = 1, 2, \dots$ в потоке модулей. Предположим для простоты, что все модули одинаковы, механически не связаны между собой и следуют друг за другом на одном и том же расстоянии l_2 с постоянной скоростью v . Тогда для функций $U_i(t)$ и $\varphi_i(t)$, определяющих положение модуля, получим систему

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 U_i}{dt^2} + 2v \frac{dU_i}{dt} + 2cU_i &= \\ &= \left(c + v \frac{d}{dt} \right) \left[u(vt - z_{1i}, t) \sigma_{1i} + u(vt - z_{2i}, t) \sigma_{2i} \right], \end{aligned}$$

$$I_c \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + 0,5v l_1^2 \frac{d\varphi_i}{dt} + 0,5c l_1^2 \varphi_i = \quad (4.21)$$

$$= 0,5 l_1 \left(c + v \frac{d}{dt} \right) \left[u(vt - z_{2i}, t) \sigma_{2i} + u(vt - z_{1i}, t) \sigma_{1i} \right],$$

где

$$z_{1i} = (l_1 + l_2)(i - 1), \quad \sigma_{1i} = \sigma \left(\frac{z_{1i}}{v}, \frac{N_0 l_0 + z_{1i}}{v} \right),$$

$$z_{2i} = z_{1i} + l_1, \quad \sigma_{2i} = \sigma \left(\frac{z_{2i}}{v}, \frac{N_0 l_0 + z_{2i}}{v} \right). \quad (4.22)$$

4.1.3. Вывод уравнений совместного движения транспортных модулей и СТЛ

Рассмотрим систему "СТЛ—одиночный модуль". Силовое взаимодействие СТЛ и модуля осуществляется в точках контакта колес с рабочей поверхностью линии. Для определения сил взаимодействия к силам \bar{F}_1, \bar{F}_2 , определяемым равенствами (4.18), добавим силы тяжести и силы инерции масс колес. Таким образом, функция $f(z, t)$ в уравнениях (4.13)—(4.16) при движении одиночного модуля примет вид

$$f(z, t) = \left[F_1 + m_2 g - m_2 \frac{d^2 u(vt, t)}{dt^2} \right] \delta(z - vt) +$$

$$+ \left[F_2 + m_2 g - m_2 \frac{d^2 u(vt - l_1, t)}{dt^2} \right] \delta(z - vt + l_1) + \tilde{f}(z, t), \quad (4.23)$$

где $\tilde{f}(z, t)$ — плотность внешних по отношению к СТЛ сил, не относящихся к модулю, $\delta(z)$ — δ -функция Дирака [16]. Поскольку каждое колесо модуля воздействует на линию в течение времени nl_0/v , то (4.23) примет вид

$$f(z, t) = \left[(m_1 + 2m_2) \frac{g}{2} + \left(c + v \frac{d}{dt} \right) (U - 0,5 l_1 \varphi - u(vt, t)) - \right.$$

$$\left. - m_2 \frac{d^2 u(vt, t)}{dt^2} \right] \delta(z - vt) \sigma \left(0, \frac{N l_0}{v} \right) + \quad (4.24)$$

$$+ \left[(m_1 + 2m_2) \frac{g}{2} + \left(c + v \frac{d}{dt} \right) (U + 0,5 l_1 \varphi - u(vt - l_1, t)) - \right.$$

$$\left. - m_2 \frac{d^2 u(vt - l_1, t)}{dt^2} \right] \delta(z - vt + l_1) \sigma \left(\frac{l_1}{v}, \frac{N l_0}{v} \right).$$

Систему уравнений совместного движения СТЛ и одиночного модуля получим, объединяя уравнения (4.13) с уравнениями (4.20). Эта система уравнений является обобщением уравнения колебаний балки под действием движущейся массы [35]. Частные случаи уравнений движения системы "СТЛ—одиночный модуль" получаются, если объединить уравнения (4.20) с уравнениями (4.14) (СТЛ с однородным по длине корпусом), (4.15) (СТЛ, струны которой скреплены с корпусом) или (4.16) (гибкая СТЛ со скрепленными струнами).

Если допустить, что модуль въезжает на покоящуюся СТЛ с разгонного горизонтального участка, то начальные условия будут нулевыми:

$$U(0) = \frac{dU(0)}{dt} = 0, \quad \varphi(0) = \frac{d\varphi(0)}{dt} = 0,$$

$$u(z, 0) = \frac{\partial u(z, 0)}{\partial t} = 0, \quad u_2(z, 0) = \frac{\partial u_2(z, 0)}{\partial t} = 0. \quad (4.25)$$

Граничные условия для функций u, u_2 определяются способом закрепления СТЛ на опорах.

Перейдем к рассмотрению системы "СТЛ—поток модулей". Чтобы определить силовое воздействие потока модулей на линию, достаточно просуммировать силы, приложенные к СТЛ со стороны отдельных модулей. Следовательно, с учетом равенства (4.24) функцию $f(z, t)$ в уравнениях (4.13)—(4.16) можно представить так

$$f(z, t) = \sum_{i=1}^{i_0} \left[(m_1 + 2m_2) \frac{g}{2} + \left(c + v \frac{d}{dt} \right) \times \right.$$

$$\times (U_i - 0,5l_1\varphi_i - u(vt - z_{1i}, t)) - m_2 \frac{d^2 u(vt - z_{1i}, t)}{dt_2} \Big] \delta_{1i} \sigma_{1i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i_0} \left[(m_1 + 2m_2) \frac{g}{2} + \left(c + v \frac{d}{dt} \right) \times \right. \quad (4.26)$$

$$\left. \times (U_i - 0,5l_1\varphi_i - u(vt - z_{2i}, t)) - m_2 \frac{d^2 u(vt - z_{2i}, t)}{dt_2} \right] \delta_{2i} \sigma_{2i} + \tilde{f}(z, t).$$

Здесь $z_{1i}, z_{2i}, \sigma_{1i}, \sigma_{2i}$ даются равенствами (4.22), i_0 — количество модулей, колеса которых контактировали с линией до рассматриваемого момента времени,

$$\delta_{1i} = \delta(z - vt, z_{1i}), \quad \delta_{2i} = \delta(z - vt, z_{2i}). \quad (4.27)$$

Объединяя уравнения движения СТЛ (одна из систем (4.13) — (4.16), в которых $f(z, t)$ имеет вид (4.26)), с уравнениями движения модулей (4.21), получим систему уравнений совместного движения модулей и СТЛ. Заметим, что количество уравнений этой системы зависит от величины временного интервала, на котором рассматривается движение.

4.1.4. Анализ уравнений движения и выбор метода решения

Рассмотрим систему уравнений движения одиночного модуля и СТЛ (4.13), (4.20). Эти уравнения связаны друг с другом посредством правых частей, содержащих искомые функции. Аналитическое решение уравнений (4.13), (4.20), несмотря на их линейность, в общем случае представляет значительные трудности. Еще более сложным является решение задачи о движении потока модулей по СТЛ. Поэтому целесообразно выявить характерные особенности задачи с целью упрощения ее решения.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$z = l_0 \bar{z}, \quad t = t_0 \bar{t}, \quad U = U_0 \bar{U}, \quad u = u_0 \bar{u}, \quad \varphi = 2 \frac{u_0}{l_1} \bar{\varphi}, \quad (4.28)$$

где $t_0 = \left(\frac{\rho_s + \rho_2}{T_1 + T_2 + EI/l_0^2} \right)^{1/2}$, u_0 — характерный размер по оси Ou , в качестве которого можно взять, например, максимальный прогиб пролета СТЛ. Тогда часть выражения (4.24), выделенная первой парой квадратных скобок, примет вид

$$(m_1 + 2m_2) \frac{g}{2} + \left(c + v \frac{d}{dt} \right) (U - 0,5l_1\varphi - u(vt, t)) - m_2 \frac{d^2 u(vt, t)}{dt^2} =$$

$$= (m_1 + m_2) \frac{g}{2} \left[1 + \frac{2u_0}{(m_1 + m_2)g} \left(c + \frac{v}{t_0} \frac{d}{d\bar{t}} \right) (U - \bar{\varphi} - \bar{u}(vt, t)) - \right. \quad (4.29)$$

$$\left. - \frac{2u_0 m_2}{(m_1 + 2m_2)g} \left(\frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 \bar{u}(vt, t)}{\partial \bar{t}^2} + \frac{2v}{t_0 t_0} \frac{\partial^2 \bar{u}(vt, t)}{\partial \bar{t} \partial \bar{z}} + \frac{v^2}{l_0^2} \frac{\partial^2 \bar{u}(vt, t)}{\partial \bar{z}^2} \right) \right].$$

Порядок переменных величин в квадратных скобках равенства (4.29) определяется выражениями

$$\varepsilon c, \quad \frac{\varepsilon v}{t_0}, \quad \varepsilon \frac{m_2}{l_0^2}, \quad 2\varepsilon \frac{m_2 v}{t_0 l_0}, \quad 2\varepsilon m_2 \frac{v^2}{l_0^2}, \quad (4.30)$$

где

$$\varepsilon = \frac{2u_0}{(m_1 + 2m_2)g}.$$

Найдем значения этих выражений для значений параметров, характерных для системы "транспортный модуль—СТЛ". Положим

$$m_1 = 10^3 \text{ кг}, \quad m_2 \ll m_1, \quad l_0 = 50 \text{ м}, \quad T_1 + T_2 + EI/L_0^2 = 10^7 \text{ Н},$$

$$\rho_s + \rho_2 = 100 \text{ кг/м}, \quad v = 100 \text{ м/с}. \quad (4.31)$$

Пусть $u_0 = 0,1$ м, что, как будет показано в дальнейшем, превышает максимальный прогиб в случае (4.31). Тогда получим значения выражений (4.30) (размерности опущены):

$$2 \cdot 10^{-5} c, 6 \cdot 10^{-4} v, 2 \cdot 10^{-2} m_2, 2,5 \cdot 10^{-3} m_2, 8 \cdot 10^{-5} m_2. \quad (4.32)$$

Первые два выражения (4.32), очевидно, значительно меньше единицы для реальных значений c и v , остальные зависят от m_2 , точнее от отношения m_2/m_1 . При типичном значении $m_2/m_1 < 10^2$ все параметры (4.32) малы по сравнению с единицей. Параметры задачи взаимосвязаны: увеличение натяжений T_1, T_2 , например, вызывает уменьшение величины u_0 и наоборот. Это приводит к тому, что величины (4.30) остаются малыми при любых реальных значениях всех параметров задачи, если выполняются условия

$$\frac{m_2}{m_1} < 10^{-2}, \quad \varepsilon c \ll 1, \quad \frac{\varepsilon v}{l_0} \ll 1. \quad (4.33)$$

Все сказанное относительно выражения в первой квадратной скобке функции (4.24) справедливо, очевидно, для части, выделенной второй парой квадратных скобок и для аналогичных выражений функции (4.26).

Будем считать, что выполняются соотношения (4.33). Тогда решение уравнений движения модулей и СТЛ можно искать в виде разложений по степеням малых параметров (4.33), перейдя предварительно к безразмерным величинам. Можно также, учитывая, что слагаемые в квадратных скобках функций (4.24), (4.26) преобладают над остальными, построить рекуррентные уравнения для определения последовательных приближений искомых функций. Обе эти процедуры эквивалентны и дают одинаковые по форме решения. Остановимся на втором способе решения и запишем уравнения для последовательных приближений искомых функций при движении потока ТМ. Воспользовавшись для этой цели уравнениями (4.13), (4.21) и функцией (4.26), получим

$$\begin{aligned} & E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[I(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u^{(k+1)} + \mu' \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial t} \right) \right] + \rho_s(z) \frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial t^2} - \\ & - T_1 \frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial z^2} + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(u^{(k+1)} - u_2^{(k+1)} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^{i_0} \left[(M_1 + 2m_2) \frac{g}{2} + \left(c + v \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(U_i^{(k)} - 0,5l_1 \varphi_i^{(k)} - u^{(k)}(vt - z_{1i}, t) \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - m_2 \frac{d^2 u^{(k)}(vt - z_{1i}, t)}{dt^2} \left. \right] \delta_{1i} \sigma_{1i} + \sum_{i=1}^{i_0} \left[(m_1 + 2m_2) \frac{g}{2} + \left(c + v \frac{\partial}{\partial t} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(U_i^{(k)} + 0,5l_1 \varphi_i^{(k)}(vt - z_{2i}, t) \right) - m_2 \frac{d^2 u^{(k)}(vt - z_{2i}, t)}{dt^2} \right] \delta_{2i} \sigma_{2i} + \tilde{f}(z, t), \\ & \rho_2(z) \frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial t^2} - T_2(z) \frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial z^2} + \\ & + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(u_2^{(k+1)} - u^{(k+1)} \right) = f_2(z, t), \\ & m_1 \frac{d^2 U_i^{(k+1)}}{dt^2} + 2v \frac{dU_i^{(k+1)}}{dt} + 2cU_i^{(k+1)} = \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} & = \left(c + v \frac{d}{dt} \right) u^{(k)}(vt - z_{1i}, t) \sigma_{1i} + \left(c + v \frac{d}{dt} \right) u^{(k)}(vt - z_{2i}, t) \sigma_{2i}, \\ & I_c' \frac{d^2 \varphi_i^{(k+1)}}{dt^2} + 0,5v l_1^2 \frac{d\varphi_i^{(k+1)}}{dt} + 0,5c l_1^2 \varphi_i^{(k+1)} = \\ & = 0,5l_1 \left[\left(c + v \frac{d}{dt} \right) u^{(k)}(vt - z_{2i}, t) \sigma_{2i} - \left(c + v \frac{d}{dt} \right) u^{(k)}(vt - z_{1i}, t) \sigma_{1i} \right], \\ & k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, i_0}, \quad U_i^{(0)} = \varphi_i^{(0)} = u^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда для первого приближения искомых функций получим следующие дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} & E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[I \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u^1 + \mu' \frac{\partial u^1}{\partial t} \right) \right] + \rho_s \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - T_1 \frac{\partial^2 u^1}{\partial z^2} + \\ & + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(u^1 - u_2^1 \right) = P \sum_{i=1}^{i_0} (\delta_{1i} \sigma_{1i} + \delta_{2i} \sigma_{2i}) + \tilde{f}_2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial t^2} - T_2 \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial z^2} + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(u_2^{(1)} - u^{(1)} \right) = f_2,$$

$$m_1 \frac{\partial^2 U_i^1}{\partial t^2} + 2v \frac{dU_i^1}{dt} + 2cU_i^1 = 0, \quad (4.36)$$

$$I_c \frac{d^2 \varphi_i^1}{dt^2} + 0,5v l_1^2 \frac{d\varphi_i^1}{dt} + 0,5c l_1^2 \varphi_i^1 = 0, \quad i = \overline{1, i_0}.$$

Здесь сила $P = 0,5 (m_1 + 2m_2) g$.

Уравнения (4.35) описывают колебания СТЛ под действием движущихся безынерционных нагрузок (сил). При нулевых начальных условиях уравнения (4.36) имеют нулевое решение

$$U_i^{(1)}(t) = 0, \quad \varphi_i^{(1)}(t) = 0.$$

Следовательно, в первом приближении точки платформ модулей совершают прямолинейное движение.

Рассмотрим структуру решения уравнений первого приближения для однопролетной СТЛ. Будем считать, что $N_0 = 1, f = 0$ и $f_2 = 0$. Это означает, что однопролетная СТЛ колеблется лишь под действием движущихся нагрузок величины P . Рассмотрим решение уравнений (4.35) при нулевых начальных условиях и положим сначала $i_0 = 1$.

Тогда правая часть первого уравнения (4.35) примет вид

$$P \left[\delta(z - vt) \sigma\left(0, \frac{l_0}{v}\right) + \delta(z - vt + l_1) \sigma\left(\frac{l_1}{v}, \frac{l_0 + l_1}{v}\right) \right]. \quad (4.37)$$

Легко видеть, что второе слагаемое выражения (4.37) получается из первого сдвигом по времени на величину l_1/v . Тогда в силу линейности уравнений (4.35) их решение можно представить в виде суммы двух составляющих

$$u^{(1)}(z, t) = u(z, t) \sigma(0, \infty) + u\left(z, t - \frac{l_1}{v}\right) \sigma\left(\frac{l_1}{v}, \infty\right),$$

$$u_2^{(1)}(z, t) = u_2(z, t) \sigma(0, \infty) + u_2\left(z, t - \frac{l_1}{v}\right) \sigma\left(\frac{l_1}{v}, \infty\right), \quad (4.38)$$

где функции $u(z, t), u_2(z, t)$ являются решениями системы уравнений

$$E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[I \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u + \mu' \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] + \rho_s \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} +$$

$$+ E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u - u_2) = P \delta(z - vt) \sigma\left(0, \frac{l_0}{v}\right), \quad (4.39)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - T_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u - u_2) = 0,$$

описывающей колебания СТЛ при движении одиночной нагрузки величиной P . В общем случае при произвольном i_0 вместо равенств (4.38) имеем

$$u^{(1)}(z, t) = \sum_{i=1}^{i_0} \left[u\left(z, t - \frac{z_{1i}}{v}\right) \sigma\left(\frac{z_{1i}}{v}, \infty\right) + u\left(z, t - \frac{z_{2i}}{v}\right) \sigma\left(\frac{z_{2i}}{v}, \infty\right) \right], \quad (4.40)$$

$$u_2^{(1)}(z, t) = \sum_{i=1}^{i_0} \left[u_2\left(z, t - \frac{z_{1i}}{v}\right) \sigma\left(\frac{z_{1i}}{v}, \infty\right) + u_2\left(z, t - \frac{z_{2i}}{v}\right) \sigma\left(\frac{z_{2i}}{v}, \infty\right) \right].$$

Функции (4.40) позволяют интерпретировать решение уравнений (4.35) как результат воздействия на СТЛ системы $2i_0$ одиночных нагрузок, расстояния между которыми (l_1 и $l_1 + l_2$) чередуются, либо двух систем одиночных равноотстоящих нагрузок (число нагрузок i_0).

Таким образом, задача о колебаниях однопролетной СТЛ при движении по ней транспортных модулей в первом приближении сводится к задаче о колебаниях пролета под действием одиночной нагрузки.

4.2. Исследования колебаний гибкой струны. Первое приближение СТЛ

В этом разделе рассмотрено нагружение струнной транспортной линии с корпусом, жесткостью которого можно пренебречь. Исследо-

вано равновесие пролета под действием одной и двух одинаковых нагрузок; получены формулы для максимального статического прогиба. Дан подробный анализ колебаний пролета при движении одиночной нагрузки и потока нагрузок для различных скоростей движения, определены максимальные динамические прогибы и выявлены безрезонансные режимы движения. Построена траектория одиночной нагрузки и найден максимальный прогиб пролета под нагрузкой.

4.2.1. Постановка задачи. Статический анализ

Рассмотрим N_0 -пролетную СТЛ, жесткостью и массой корпуса которой можно пренебречь. Струны СТЛ считаем связанными между собой невесомыми связями так, что расстояния между их точками, лежащими на одной вертикали, неизменны. Опоры линии предполагаем жесткими двусторонними связями.

Из принятых допущений следует, что соседние пролеты при движении не оказывают взаимного воздействия друг на друга и, следовательно, колебания пролетов в первом приближении будут одинаковыми с точностью до сдвига по времени на величину l_0/v . Это значит, что задача сводится к изучению колебаний однопролетной СТЛ под действием движущихся нагрузок. Из уравнений (4.16), (4.35), (4.39) следует, что колебания пролета при движении одиночной нагрузки описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{P}{\rho'} \delta(z - vt) \sigma\left(0, \frac{l_0}{v}\right), \quad (4.41)$$

где

$$a = (T'/\rho')^{1/2} = \left(\frac{T_1 + T_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)^{1/2}.$$

Граничные и начальные условия задачи:

$$u(0, t) = u(l_0, t) = 0, \quad (4.42)$$

$$u(z, 0) = \frac{\partial u(z, 0)}{\partial t} = 0. \quad (4.43)$$

Если на пролет не действуют сосредоточенные нагрузки, то уравнение равновесия нижней струны пролета, которая обеспечивает горизонтальность верхней струны, имеет вид

$$T_2 \frac{d^2 y_{20}}{dz^2} + (\rho_1 + \rho_2) g = 0.$$

Отсюда с учетом нулевых граничных условий получим функцию перемещений

$$y_{20}(x) = g \frac{\rho_1 + \rho_2}{2T_2} (l_0 - z) z,$$

которая использовалась при выводе уравнений (4.13). Очевидно, что

$$y_{20}^{\max} = gl_0^2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{8T_2}.$$

Если положить, например, длину пролета $l_0 = 50$ м, суммарную массу на единицу длины струн $\rho_1 + \rho_2 = 100$ кг/м и натяжение струн $T_2 = 10^7$ Н, то максимальное перемещение $y_{20}^{\max} = 3,125$ см. Малое значение перемещения y_{20}^{\max} позволяет заменить функцию $y_{20}(z)$ в формулах (4.9) ее средним значением на пролете.

Пусть две одинаковые нагрузки величиной P действуют на пролет в точках $z = b, z = b + l_1$. В результате пролет разбивается на три участка, равновесие которых описывается уравнением

$$\frac{d^2 u_i}{dz^2} = 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Отсюда с учетом условий

$$u^1(0) = u^3(l_0) = 0, \quad u^1(b) = u^2(b), \quad u^2(b + l_1) = u^3(b + l_1),$$

$$T' \frac{d}{dz} (u^2 - u^1)_{z=b} = -P, \quad T' \frac{d}{dz} (u^3 - u^2)_{z=b+l_1} = -P,$$

находим

$$u^i(z) = \frac{P}{T} (C^i z + D^i), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$C^1 = 2 - \frac{2b + l_1}{l_0}, \quad C^2 = C^1 - 1, \quad C^3 = -\frac{2b + l_1}{l_0},$$

$$D^1 = 0, \quad D^2 = b, \quad D^3 = 2b + l_1.$$

Простые рассуждения приводят к выводу, что максимальный прогиб полета

$$u^{\max} = \frac{P}{T} \left[-\frac{2}{l_0} b^2 + b \left(2 - \frac{3l_1}{l_0} \right) - \frac{l_1^2}{l_0} + l_1 \right].$$

Считая l_1 постоянной величиной, найдем

$$u_c^{\max} = \max u_{\max}(b).$$

После несложных вычислений получим

$$u_c^{\max} = \begin{cases} \frac{l_0 P}{2T} \left(1 - \frac{l_1}{2l_0} \right)^2, & 0 \leq l_1 \leq \frac{2}{3} l_0 \\ \frac{l_1 P}{2T} \left(1 - \frac{l_1}{l_0} \right), & \frac{2}{3} l_0 \leq l_1 \leq l_0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Полагая в (4.44) $l_1 = 0$ и разделив полученный результат пополам, получим максимальный прогиб полета под действием одной нагрузки P

$$u_c^{1\max} = \frac{l_0 P}{4T}. \quad (4.45)$$

4.2.2. Колебания полета при движении одиночной нагрузки

Для определения колебаний полета под действием одиночной нагрузки необходимо решить уравнение (4.41) при условиях (4.42), (4.43).

1. Динамический прогиб. Общий случай. Для удобства дальнейших преобразований введем новую переменную z'

$$z = \frac{l_0 z'}{\pi}.$$

Уравнение (4.41) и условия (4.42), (4.43) примут вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\pi^2}{l_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} = \frac{P}{\rho' l_0} \delta \left(\frac{l_0}{\pi} z' - vt \right) \sigma \left(0, \frac{l_0}{v} \right), \quad (4.46)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (4.47)$$

$$u(z', 0) = \frac{\partial u(z', 0)}{\partial t} = 0. \quad (4.48)$$

Для решения полученной задачи применим к уравнению (4.46) интегральное синус-преобразование Фурье в конечных пределах [33]. В результате придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\pi^2}{l_0^2} n^2 \tilde{u} = \frac{\pi P}{\rho' l_0} \sin \frac{\pi v n}{l_0} t \sigma \left(0, \frac{l_0}{v} \right), \quad (4.49)$$

с условиями

$$\tilde{u}(n, 0) = \frac{d\tilde{u}(n, 0)}{dt} = 0 \quad (4.50)$$

для трансформанты

$$\tilde{u}(n, t) = \int_0^\pi u(z', t) \sin(nz') dz',$$

Решив уравнение (4.49) при условиях (4.50), получим

$$\tilde{u}(n, t) = \frac{\pi A}{2n^2} \begin{cases} v \sin \frac{\omega \pi n}{l_0} t - a \sin \frac{v \pi n}{l_0} t, & 0 \leq t \leq \frac{l_0}{v}, \\ v \left[\sin \frac{\omega \pi n}{l_0} t + \sin \pi n \left(1 + \frac{a}{v} - \frac{at}{l_0} \right) \right], & t > \frac{l_0}{v}. \end{cases} \quad (4.51)$$

Здесь

$$A = \frac{2Pl}{\rho' a \pi^2 (v^2 - a^2)}.$$

Решение исходной задачи представляется в виде ряда

$$u(z', t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}(n, t) \sin nz'. \quad (4.52)$$

Вернувшись в равенстве (4.52) к прежней переменной z , получим

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l_0} z \begin{cases} v \sin \frac{a\pi n}{l_0} t - a \sin \frac{v\pi n}{l_0} t, & 0 \leq t \leq \frac{l_0}{v}, \\ v \left[\sin \frac{a\pi n}{l_0} t + \sin \pi n \left(1 + \frac{a}{v} - \frac{at}{l_0} \right) \right], & t > \frac{l_0}{v}. \end{cases} \quad (4.53)$$

Выражение (4.53) позволяет вычислить динамический прогиб пролета в общем случае, то есть для любых скоростей $v \neq a$ и момента времени t . Вычисляя предел функции $u(z, t)$ при $v \rightarrow a$, получим

$$u(z, t) = \frac{gl_0(m_1 + 2m_2)}{2\rho' \pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l_0} z \times \begin{cases} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{a\pi n}{l_0} t - \frac{a\pi n t}{l_0} \cos \frac{a\pi n}{l_0} t, & 0 \leq t \leq \frac{l_0}{a}, \\ -\frac{\pi}{n} \cos \frac{a\pi n}{l_0} t, & t > \frac{l_0}{a}. \end{cases}$$

Благодаря хорошей сходимости использованного тригонометрического ряда функция (4.53) удобна для численного анализа. Качественный анализ этой функции возможен только после ее упрощения путем суммирования входящих в равенство (4.53) рядов. Воспользуемся для этой цели известным рядом [6].

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nz \sin ny = \begin{cases} z \frac{\pi - y}{2}, & -y \leq z \leq y, \\ y \frac{\pi - z}{2}, & y \leq x \leq 2\pi - y, \quad 0 < y < \pi. \end{cases} \quad (4.54)$$

При использовании разложения (4.54) для суммирования рядов в выражении (4.53) возникают качественно различные ситуации в зависимости от соотношения скорости движения нагрузки v и скорости распространения возмущений вдоль струны $a = (T/\rho)^{1/2}$. Рассмотрим поэтому некоторые частные случаи.

1. Случай $v > a = (T/\rho)^{1/2}$ (скорость движения нагрузки превышает скорость распространения волны деформации вдоль струны). Максимальный динамический прогиб.

Ряды равенства (4.53) на основании разложения (4.54) запишутся так:

$$I_1 = v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n \frac{a\pi t}{l_0} \sin n \frac{\pi z}{l_0} = \frac{v\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z \left(1 - \frac{vt}{l_0} \right), & 0 < z < at, \quad \left[0 < t < \frac{l_0}{a} \right], \\ at \left(1 - \frac{z}{l_0} \right), & at \leq z \leq 2l_0 - at \end{cases}$$

$$I_2 = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n \frac{v\pi t}{l_0} \sin n \frac{\pi z}{l_0} = \frac{a\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z \left(1 - \frac{vt}{l_0} \right), & 0 < z < vt, \quad \left[0 < t < \frac{l_0}{v} \right], \\ vt \left(1 - \frac{z}{l_0} \right), & vt \leq z \leq 2l_0 - vt \end{cases}$$

$$I_2 = v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\pi \left(1 + \frac{a}{v} - \frac{at}{l_0} \right) \sin n \frac{\pi z}{l_0} = v\pi^2 \begin{cases} \frac{z}{2l_0} \left(\frac{at}{l_0} - \frac{a}{v} \right), & 0 < z < l_0 + l_0 \frac{a}{v} - at, \quad \left[\frac{l_0}{v} < t < \frac{l_0}{a} + \frac{l_0}{v} \right], \\ \left(1 + \frac{a}{v} - \frac{at}{l_0} \right), & l_0 + l_0 \frac{a}{v} - at \leq z \leq l_0 - l_0 \frac{a}{v} + at, \end{cases}$$

$$I_4 = -v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n \frac{a\pi t}{l_0} \sin n \frac{\pi z}{l_0} =$$

$$= -v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n \frac{a\pi}{l_0} \left(t - \frac{l_0}{a} \right) \sin n \frac{\pi}{l_0} (l_0 - z) =$$

$$= \frac{v\pi^2}{2l_0} \begin{cases} (l_0 - z)(2l_0 - at), & z \geq 2l_0 - at, \quad \left[\frac{l_0}{a} < t < 2 \frac{l_0}{a} \right], \\ vt \left(1 - \frac{z}{l_0} \right), & z < 2l_0 - at. \end{cases}$$

Опустим промежуточные вычисления и запишем динамический прогиб u на временных интервалах, преобразованных пересечением областей определения соответствующих рядов I_k и функции (4.53).

При $0 \leq t \leq \frac{l_0}{v}$: $u = A(I_1 - I_2)$,

$$I_1 - I_2 = \frac{\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z(v-a), & 0 \leq z < at, \\ a(vt-z), & at \leq z < vt, \\ 0, & vt \leq z \leq l_0. \end{cases}$$

При $\frac{l_0}{v} < t \leq \frac{l_0}{2a} \left(1 + \frac{a}{v} \right)$: $u = A(I_1 + I_3)$,

$$I_1 + I_3 = \frac{\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z(v-a), & z < at, \\ a(vt-z), & at \leq z < l_0 + l_0 \frac{a}{v} - at, \\ (v+a)(l_0-z), & l_0 + l_0 \frac{a}{v} - at \leq z \leq l_0. \end{cases}$$

При $\frac{l_0}{2a} \left(1 + \frac{a}{v} \right) < t \leq \frac{l_0}{a}$: $u = A(I_1 + I_3)$,

$$I_1 + I_3 = \frac{\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z(v-a), & 0 \leq z < l_0 + l_0 \frac{a}{v} - at, \\ a \left(l_0 + l_0 \frac{v}{a} - z - vt \right), & l_0 + l_0 \frac{a}{v} - at < z \leq at, \\ (v+a)(l_0-z), & at < z \leq l_0. \end{cases}$$

При $\frac{l_0}{a} \left(1 + \frac{a}{v} \right) < t < \frac{l_0}{a} + \frac{l_0}{v}$: $u = A(I_3 - I_4)$,

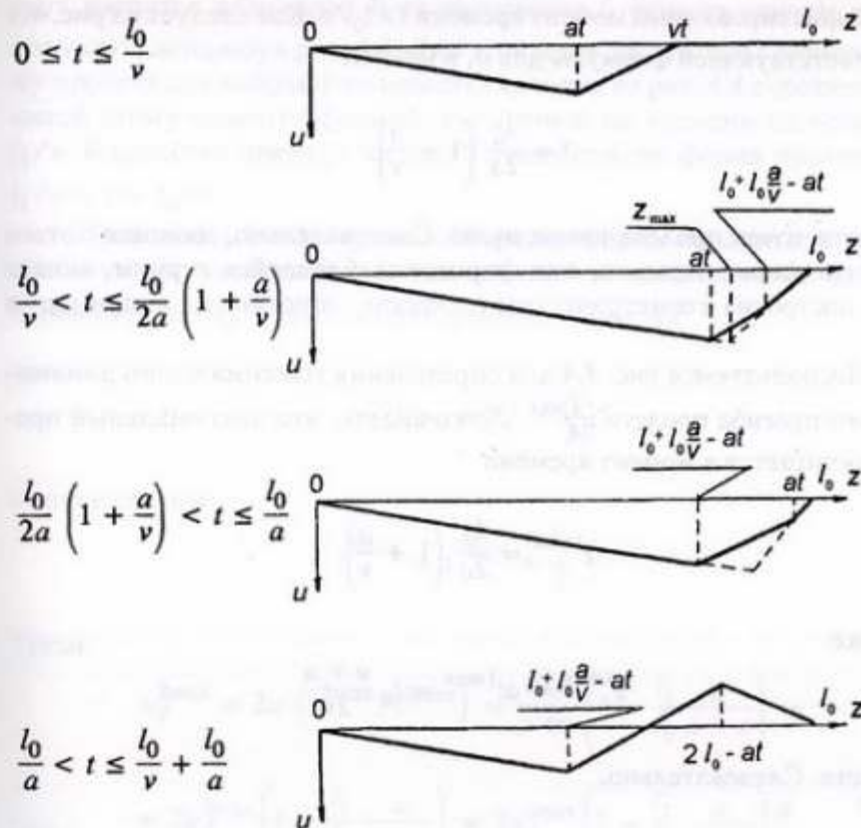


Рис. 4.4

$$I_3 - I_4 = \frac{\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z(v-a), & 0 \leq z < l_0 + l_0 \frac{a}{v} - at, \\ a \left(l_0 + l_0 \frac{v}{a} - z - vt \right), & l_0 + l_0 \frac{a}{v} - at < z \leq 2l_0 - at, \\ (l_0 - z)(a - v), & 2l_0 - at < z \leq l_0. \end{cases}$$

На рис. 4.4 изображены формы пролета на рассмотренных интервалах времени.

Траектория нагрузки является прямой линией, т.е. нагрузка движется на невозмущенной части пролета. Учитывая периодичность функции I_3, I_4 во времени, можно продолжить их на новые временные интервалы и получить на этих интервалах функцию $u(z, t)$. В этом, однако, нет необходимости, так как после схода нагрузки с пролета в момент времени l_0/v движение пролета можно рассматривать как ре-

зультат развития возмущений его формы и скорости, имевших место в любой фиксированный момент времени $t > l_0/v$. Как следует из рис. 4.4 и соответствующей формулы для u , в момент

$$t = \frac{l_0}{2a} \left(1 + \frac{a}{v} \right)$$

скорости точек пролета равны нулю. Следовательно, начиная с этого момента форма пролета, как форма колеблющейся струны, может быть построена геометрическим способом, описанным, например, в [7].

Вспользуемся рис. 4.4 для определения максимального динамического прогиба пролета $u_d^{1\max}$. Легко видеть, что максимальный прогиб достигается в момент времени

$$t^{1\max} = \frac{l_0}{2a} \left(1 + \frac{a}{v} \right)$$

в точке

$$z^{1\max} = at^{1\max} = l_0 \frac{v+a}{2v}$$

пролета. Следовательно,

$$u_d^{1\max} = A \frac{\pi^2}{2l_0} (v-a) z^{1\max} = \frac{Pl_0}{2\rho'av} = \frac{Pl_0}{2(T\rho'v)^{1/2}} = 2u_c^{1\max} \frac{a}{v}. \quad (4.55)$$

Из (4.55), следует, что при увеличении v максимальный динамический прогиб пролета убывает, а при скорости v , близкой к скорости a , в два раза превышает максимальный статический прогиб.

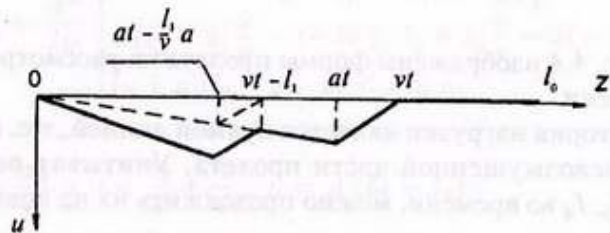


Рис. 4.5

Форму пролета при движении по нему транспортного модуля, т.е. двух нагрузок величиной P на расстоянии l_1 одна от другой, можно получить, используя рис. 4.4. Для этой цели достаточно сложить форму пролета для выбранного момента времени из рис. 4.4 с соответствующей этому моменту формой, смещенной по времени на величину l_1/v . В качестве примера на рис. 4.5 изображена форма пролета при $l_1/v < t < l_0/v$.

Проведенный геометрический анализ формы пролета при движении двух нагрузок позволяет заключить, что максимальный динамический прогиб $u_d^{2\max}$ достигается в момент времени

$$t^{2\max} = t^{1\max} + \frac{l_1}{2v}$$

в точке струны

$$z^{2\max} = z^{1\max} + \frac{l_1}{2} \frac{a}{v}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_d^{2\max} &= 2u \left(z^{2\max}, t^{2\max} \right) = \frac{Pl_0}{\rho'av} \left(1 - \frac{l_1}{l_0} \frac{a}{a+v} \right) = \\ &= 2u_d^{2\max} \left(1 - \frac{l_1}{l_0} \frac{a}{a+v} \right) = 2u_d^{2\max} \left(1 - \frac{l_1}{l_0} \frac{a}{a+v} \right) \frac{a}{v}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

2. Случай $a/2 \leq v < a$ (скорость движения нагрузки меньше скорости распространения волны деформации вдоль струны). Максимальный прогиб.

В отличие от предыдущего случая для суммирования рядов в равенстве (4.53) при $v < a$ недостаточно только этого ограничения на скорость движения нагрузки и при выполнении расчетов необходимо вводить дополнительные ограничения на v . Это является признаком того, что при $v < a$ колебания пролета будут качественно различны в зависимости от того, какому из интервалов

$$\left[\frac{a}{i+1}, \frac{a}{i} \right], \quad i = 1, 2, \dots$$

принадлежит v . Рассмотрим первый из этих интервалов, т.е. будем считать, что

$$v \in \left[\frac{a}{2}, a \right).$$

Чтобы получить конечное выражение для функции $u(z, t)$, кроме функций $I_1 - I_4$ будем использовать функцию

$$\begin{aligned} I_5 &= -v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n \frac{\pi t}{l_0} \sin n \frac{\pi z}{l_0} = \\ &= -v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n \frac{\pi}{l_0} \left(t - \frac{2l_0}{a} \right) \sin n \frac{\pi z}{l_0} = \\ &= -\frac{v\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z \left(3v - \frac{at}{l_0} \right), & 0 < z < at - 2l_0, \left[\frac{2l_0}{a} < t < \frac{3l_0}{a} \right], \\ (at - 2l_0) \left(1 - \frac{z}{l_0} \right), & at - 2l_0 \leq z \leq 4l_0 - at. \end{cases} \end{aligned}$$

Опустим некоторые промежуточные вычисления и запишем функцию перемещений $u(z, t)$ на нескольких последовательных временных интервалах.

При $0 \leq t \leq \frac{l_0}{a}$: $u = A(I_1 - I_2)$,

$$I_1 - I_2 = \frac{\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z(v - a), & 0 \leq z < vt, \\ v(z - at), & vt \leq z < at, \\ 0, & at \leq z \leq l_0. \end{cases}$$

При $\frac{l_0}{a} < t \leq \frac{2l_0}{a+v}$: $u = -A(I_2 + I_4)$

$$I_2 + I_4 = \frac{\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z(a - v), & 0 \leq z < vt, \\ v(at - z), & vt \leq z < \frac{2l_0}{a+v}, \\ 2v(l_0 - z), & \frac{2l_0}{a+v} \leq z \leq l_0. \end{cases}$$

При $\frac{2l_0}{a+v} \leq t < \frac{l_0}{v}$: $u = -A(I_2 + I_4)$

$$I_2 + I_4 = \frac{\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z(a - v), & 0 \leq z < 2l_0 - at, \\ z(a - 2v) + v(2l_0 - at), & 2l_0 - at < z < vt, \\ 2v(l_0 - z), & vt \leq z \leq l_0. \end{cases}$$

При $\frac{l_0}{v} \leq t < \frac{2l_0}{a}$: $u = A(I_3 - I_4)$

$$I_3 - I_4 = \frac{\pi^2}{2l_0} \begin{cases} z(v - a), & 0 \leq z < 2l_0 - at, \\ z(2v - a) + v(at - 2l_0), & 2l_0 - at \leq z < l_0 + \frac{l_0 a}{v} - at, \\ (a - v)(l_0 - z), & l_0 + \frac{l_0 a}{v} - at < z \leq l_0. \end{cases}$$

При $\frac{2l_0}{a} \leq t < \frac{l_0}{2a} \left(3 + \frac{a}{v} \right)$: $u = A(I_3 - I_5)$

$$I_3 - I_5 = \frac{\pi^2}{2l_0} \begin{cases} 3z(v - a), & 0 \leq z < at - 2l_0, \\ z(2v - a) + v(at - 2l_0), & at - 2l_0 \leq z < l_0 + \frac{l_0 a}{v} - at, \\ (a - v)(l_0 - z), & l_0 + \frac{l_0 a}{v} - at \leq z \leq l_0. \end{cases}$$

Формы пролета, соответствующие рассмотренным промежуткам времени, представлены на рис. 4.6. При

$$t = \frac{l_0}{2a} \left(3 + \frac{a}{v} \right)$$

скорости точек пролета, как видно из рисунка, становятся нулевыми и, следовательно, в любой последующий момент времени его форму можно получить геометрическим построением, описанным в [31].

Координата $z^{1\max}$ максимального динамического прогиба $u_d^{1\max}$ и момент времени $t^{1\max}$, в который он достигается, легко определяются из рис. 4.6.

$$t^{1\max} = \frac{2l_0}{a+v}, \quad z^{1\max} = \frac{2vl_0}{a+v}.$$

Тогда

$$u_d^{1\max} = A \frac{\pi^2}{2l_0} x^{1\max} = \frac{2Pl_0}{\rho' av} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{v} \right)^2} = 8u_c^{1\max} \frac{av}{(v+a)^2}. \quad (4.57)$$

Из этого равенства, в частности, следует, что при уменьшении скорости v от a до $a/2$ прогиб $u_d^{l_{\max}}$ уменьшается в $9/8$ раз.

Аналогично может быть найден прогиб пролета при

$$\frac{a}{i+1} \leq v \leq \frac{a}{i} \text{ для любого } i.$$

4.2.3. Динамический прогиб пролета при движении потока на грузок

Предположим, что в момент времени $t = 0$ на покоящийся пролет вступает первая из потока i_0 нагрузок величины P , движущихся с постоянной скоростью v на расстоянии l' одна от другой. С практической точки зрения весьма важно знать величину динамического прогиба пролета после прохождения i_0 -й нагрузки в зависимости от значений постоянных l' , v и i_0 . В частности, для организации непрерывного движения нагрузок необходимо найти такие значения l' и v , т.е. такие режимы движения, при которых максимальный динамический прогиб пролета остается ограниченным для большого числа нагрузок ($i_0 \rightarrow \infty$). Не менее важно также найти резонансные режимы движения, т.е. те значения параметров l' и v , при которых максимальный динамический прогиб неограниченно возрастает с увеличением числа прошедших по пролету нагрузок.

Для рассмотрения поставленных задач воспользуемся результатами, полученными в пунктах 4.1.4 и 4.2.2, из которых следует, что динамический прогиб пролета u_d дается равенством

$$u_d(z, t) = \sum_{i=1}^{i_0} u\left(z, t - (i-1) \frac{l'}{v}\right) \sigma\left((i-1) \frac{l'}{v}, \infty\right), \quad (4.58)$$

где функция $u(z, t)$ определена формулой (4.53). Из равенства (4.53) следует, что функция $u(z, t)$ при $t > l_0/v$ периодична по t с периодом $t_0 = 2l_0/a$. Тогда функция $u\left(z, t - (i-1) \frac{l'}{v}\right)$ имеет тот же период при $t > l_0/v + (i-1) \frac{l'}{v}$, а $u_d(z, t)$ — при $t > l_0/v + (i_0-1) \frac{l'}{v}$. Следовательно, для небольших чисел i_0 прогиб u_d в фиксированный момент времени в интервале

$$l_0/v + (i_0-1) \frac{l'}{v} < t^* < l_0/v + (i_0-1) \frac{l'}{v} + t_0$$

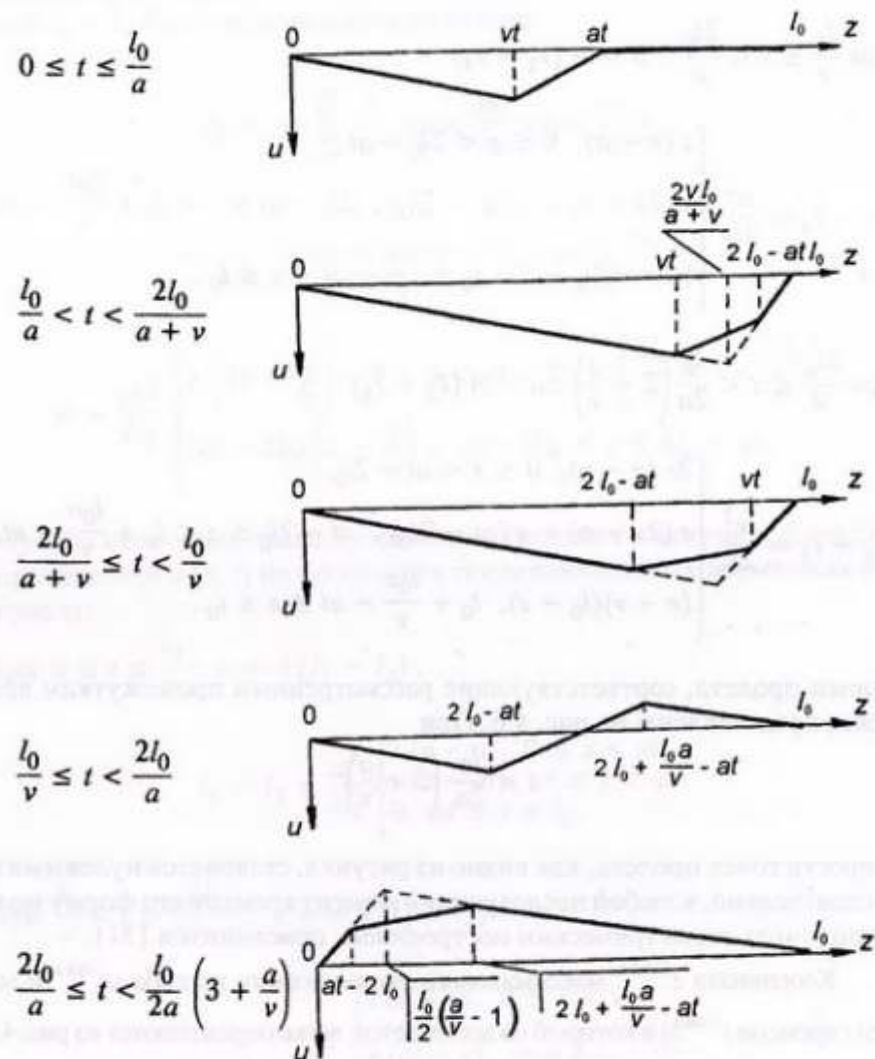


Рис. 4.6

можно определить геометрическим путем. Для этого, очевидно, нужно сделать следующее:

- 1) построить график функции $u\left(z, t^* - (i_0 - 1)l'/v\right)$ на интервале $0 \leq z \leq l_0$;
- 2) продлить периодически этот график на значения $z > l_0$;
- 3) сложить i_0 графиков функций $u\left(z, t^* - (i_0 - 1)l'/v\right)$ на интервале $0 \leq z \leq l_0$, смещая каждый последующий относительно предыдущего на l' в отрицательном направлении оси Oz .

Некоторые выводы из равенства (4.53) при определенных значениях l' и v можно получить и без геометрических построений.

1. Случай $v = \frac{a}{2k+1}$; $k = 1, 2, 3, \dots$, l' — любое.

Из равенства (4.53) имеем

$$\begin{aligned} u(z, t) &= Av \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sin \frac{n\pi a}{l_0} t + \sin n\pi \left(1 + \frac{a}{l_0}\right) \right] \sin \frac{n\pi z}{l_0} = \\ &= Av \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sin \frac{n\pi a}{l_0} t + \sin n\pi \left(2(k+1) - \frac{at}{l_0}\right) \right] \sin \frac{n\pi z}{l_0} \equiv 0 \\ & \quad t > \frac{l_0}{v}, \quad 0 \leq z \leq l_0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Это тождество означает, что возмущение, созданное движущейся по пролету одиночной нагрузкой, после ее схода с пролета полностью исчезает. Из него следует также, что при движении потока сошедшие с пролета нагрузки не вносят вклада в деформацию последнего, и прогиб пролета определяется лишь движущимися по нему нагрузками. Следовательно, максимальный прогиб пролета ограничен и может быть найден, если задать расстояния между нагрузками.

Анализ характера деформации пролета позволяет сделать вывод, что при $l' \geq 2kl_0/(2k+1)$ каждая нагрузка вступает на невозмущенный участок пролета, т.е. все нагрузки находятся в одинаковых условиях движения. Таким образом, в рассматриваемом режиме движения колебания пролета исчезают в силу взаимного погашения волн деформации. Кроме этого, положительной чертой данного режима движения является необходимость точно выдерживать лишь скорость движения, не заботясь об интервалах между нагрузками, которые могут быть любыми.

2. Случай $v = \frac{a}{2k}$, $l = \frac{l-0,5}{k}$, $k, j = 1, 2, 3, \dots$.

Равенство (4.53) в этом случае примет вид

$$u(z, t) = 2Av \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{l_0} t \sin \frac{n\pi z}{l_0}, \quad t > \frac{l_0}{v}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} u\left(z, t - (i-1)\frac{l'}{v}\right) &= u\left(z, t - (i-1)(2j-1)\frac{l_0}{f}\right) = \\ &= u\left(z, t + (i-1)\frac{l_0}{f}\right) = (-1)^{i-1} u(z, t), \quad t > \frac{l_0}{v} + (i-1)\frac{l'}{v}. \end{aligned}$$

Тогда из равенства (4.58) получим

$$\begin{aligned} u_d(z, t) &= u(z, t) \sum_{i=1}^{i_0} (-1)^{i-1} = \begin{cases} u(z, t), & i_0 - \text{нечетное,} \\ 0, & i_0 - \text{четное.} \end{cases} \\ & \quad t > \frac{l_0}{v} + (i_0 - 1)\frac{l'}{v}. \end{aligned}$$

Это значит, что в рассматриваемом режиме движения прогиб пролета после прохождения i_0 -й нагрузки равен прогибу после прохождения одной нагрузки, если i_0 нечетно, и равен нулю, если i_0 четно, т.е. прогиб ограничен при любом i_0 .

Максимальная скорость движения v равна $0,5a$, а минимальное расстояние между нагрузками $l' = 0,5l_0$ (по пролету могут одновременно двигаться две нагрузки). Подробный анализ, проведенный для указанных значений v и l' , позволяет заключить, что максимальный динамический прогиб пролета u_d^{\max} равен максимальному динамическому прогибу при движении одной нагрузки с этой скоростью, т.е.

$$u_d^{\max} = u_d^{1\max} = 4/9 Pl_0/T'$$

Поскольку в силу равенств (4.44), (4.45)

$$u_c^{2\max} = \frac{9Pl_0}{32T}, \quad u_c^{1\max} = \frac{Pl_0}{4T},$$

$$u_d^{\max} = \frac{128}{81} u_c^{2\max} = 1,58 u_c^{2\max},$$

$$u_d^{\max} = \frac{16}{9} u_c^{1\max} = 1,78 u_c^{1\max}.$$

3. Случай $\frac{l'}{v} = jt_0$, $v \neq \frac{a}{2k+1}$, $j, k = 1, 2, 3, \dots$.

Из равенств (4.53), (4.58) следует, что

$$u_d(z, t) = i_0 u(z, t), \quad t > \frac{l_0}{v} + (i_0 - 1) \frac{l_0}{v}.$$

Таким образом, для промежутка времени l'/v , кратного периоду t_0 , динамический прогиб пролета (и, в частности, максимальный динамический прогиб) растет пропорционально количеству прошедших по пролету нагрузок. С практической точки зрения это самый невыгодный режим движения нагрузок, приводящий к резонансной раскачке пролета, для нейтрализации которой требуется надежное демпфирование колебаний.

4. Случай $\frac{l'}{v} = \left(j - \frac{1}{2}\right) t_0$, $v \neq \frac{a}{2k+1}$, $j, k = 1, 2, 3, \dots$.

Для такого режима движения из формул (4.53), (4.58) имеем

$$\begin{aligned} u_d(z, t) = & Av \left[\frac{i_0}{2} \right] \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n) \frac{1}{n^2} \left[\sin \frac{n\pi t}{l_0} t + \right. \\ & \left. + \sin n\pi \left(1 + \frac{a}{v} - \frac{at}{l_0} \right) \right] \sin \frac{n\pi z}{l_0} + \\ & + Av \left(i_0 - 2 \left[\frac{i_0}{2} \right] \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sin \frac{n\pi t}{l_0} + \sin n\pi \left(1 + \frac{a}{v} - \frac{at}{l_0} \right) \right] \sin \frac{n\pi z}{l_0}, \\ & t > \frac{l_0}{v} + (i_0 - 1) \frac{l_0}{v}. \end{aligned}$$

Здесь $\left[\frac{i_0}{2} \right]$ означает целую часть числа $\frac{i_0}{2}$.

Анализируя это равенство, можно сделать вывод, что прогиб пролета растет с увеличением числа прошедших по пролету нагрузок,

медленнее, чем в предыдущем случае. Тем не менее, и этот режим движения приводит к резонансным колебаниям пролета.

Как уже указывалось ранее, поток модулей в первом приближении эквивалентен двум потокам нагрузок, если нагрузки второго потока отстают от соответствующих нагрузок первого на расстоянии l_1 , а расстояние между нагрузками в потоках $l' = l_1 + l_2$. Поскольку $l_1 \leq l_0$, то, как легко убедиться, выводы, относящиеся к потокам нагрузок, справедливы и для потока модулей.

4.2.4. Расчет траектории одиночной нагрузки. Максимальный прогиб пролета под нагрузкой

Прогиб пролета при движении одиночной нагрузки дается формулой (4.53)

$$\begin{aligned} u(z, t) = & A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(v \sin \frac{n\pi t}{l_0} - a \sin \frac{n\pi t}{l_0} \right) \sin \frac{n\pi z}{l_0}, \\ & 0 \leq t \leq \frac{l_0}{v}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

Уравнение траектории одиночной нагрузки, очевидно, запишется в виде

$$u = W(z), \quad (4.61)$$

где

$$W(z) = u \left(z, \frac{z}{v} \right) = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(v \sin \frac{n\pi z}{vl_0} - a \sin \frac{n\pi z}{l_0} \right) \sin \frac{n\pi z}{l_0}. \quad (4.62)$$

Переходя в равенстве (4.62) к пределу при $v \rightarrow 0$, получим

$$W(x) \Big|_{v=0} = \frac{2Pl_0}{\rho' \pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi z}{l_0}. \quad (4.63)$$

Этот ряд суммируется с помощью формулы (4.54)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi z}{l_0} = -\frac{\pi^2}{2l_0^2} z(l_0 - z). \quad (4.64)$$

Так как z — координата нагрузки, то максимальный прогиб пролета при $v = 0$ будет в точке максимума функции (4.64), т.е. для $z = l_0/2$. Подставив это значение в (4.63) и (4.64), получим

$$W^{\max} \Big|_{v=0} = \frac{Pl_0}{4\rho'a^2} = u_c^{\max}.$$

Будем теперь считать $0 < v < a$ и запишем функцию (4.62) в виде

$$W(l_0y) = B \left[\alpha y(1-y) - \frac{2}{\pi^2} J_1(y) \right] = W_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (4.65)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{a}{v}, \quad y = \frac{z}{l_0}, \quad B = \frac{Pl_0\alpha}{\rho'a^2(\alpha^2 - 1)},$$

$$J_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\alpha y \sin n\pi y.$$

Учитывая, что

$$J_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n(\alpha y - 2\pi k) \sin n\pi y, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

просуммируем этот ряд с помощью формулы (4.54) для всех $0 \leq y \leq 1$.

$$J_1(y) = \frac{\pi^2}{2} \begin{cases} f_2(0, y), & 0 \leq y \leq \frac{2}{\alpha+1}, \\ f_1(1, y), & \frac{2}{\alpha+1} \leq y \leq \frac{2}{\alpha-1}, \\ f_2(1, y), & \frac{2}{\alpha-1} \leq y \leq \frac{2}{\alpha+1}, \\ \dots \\ f_1(n, y), & \frac{2n}{\alpha+1} \leq y \leq \frac{2n}{\alpha-1}, \\ f_2(n, y), & \frac{2n}{\alpha-1} \leq y \leq \frac{2n}{\alpha+1}, \\ \dots \end{cases}$$

Здесь

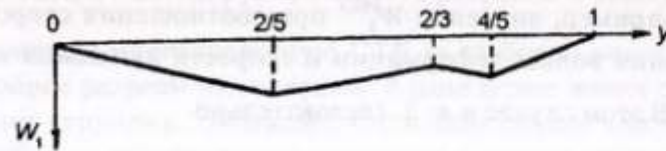


Рис. 4.7

$$f_1(n, y) = (\alpha y - 2n)(1 - y), \quad f_2(n, y) = y(1 + 2n - \alpha y).$$

Чтобы величина y принимала все значения из промежутка $[0, 1]$, n должно достигать значения n_0 , где n_0 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$n_0 \geq (\alpha - 1)/2.$$

После подстановки (4.66) в (4.65) получим

$$W_1(y) = B \begin{cases} \varphi_2(0, y), & 0 \leq y \leq \frac{2}{\alpha+1}, \\ \varphi_1(n, y), & \frac{2n}{\alpha-1} \leq y \leq \frac{2(n+1)}{\alpha-1}, \\ \varphi_2(n, y), & \frac{2n}{\alpha-1} \leq y \leq \frac{2(n+1)}{\alpha+1}, \end{cases} \quad (4.67)$$

где

$$\varphi_1(n, y) = 2n(1 - y), \quad \varphi_2(n, y) = y(\alpha - 1 - 2n), \quad n = \overline{1, n_0}.$$

Из (4.67) следует, что траектория нагрузки состоит из прямолинейных отрезков, начальным и конечным из которых являются отрезки, определяемые функциями $\varphi_2(0, y)$ и $\varphi_1(n_0, y)$ соответственно.

На рис. 4.7 изображена траектория нагрузки при $\alpha = 4$. Легко видеть, что на отрезках φ_2 функция $W_1(y)$ возрастает, а на φ_1 — убывает. Ясно поэтому, что

$$W_1^{\max} = \max_{0 \leq y \leq 1} W_1(y) = B \max_{n=0, n_0-1} \varphi_2 \left(n, \frac{2(n+1)}{\alpha+1} \right).$$

Найдем, например, значение W_1^{\max} при соотношении скорости распространения волны деформации к скорости движения нагрузки $\alpha = \frac{a}{v} = 7$. В этом случае $n = 3$, следовательно

$$W_1^{\max} = B \max \left(\frac{2}{\alpha + 1} (\alpha - 1), \frac{4}{\alpha + 1} (\alpha - 3), \frac{6}{\alpha + 1} (\alpha - 5) \right) = \\ = \frac{B}{8} \max (12, 16, 12) = 2B \frac{7}{24} \frac{Pl_0}{\rho a^2} = \frac{7}{6} u_c^1 \max.$$

4.3. Колебания струнной транспортной системы с упругим корпусом

В правильно рассчитанной динамической системе амплитуды колебаний, усилия в упругих элементах и нагрузки, воспринимаемые опорами, должны иметь в рабочей области меньшие значения, чем те, какие получаются при статической нагрузке, равной максимальной амплитуде переменной силы.

Однако вне рабочей области возможно переходное резонансное состояние, при котором амплитуда колебаний и динамические усилия значительны. Резонансные амплитуды определяются демпфированием в системе и скоростью прохода через резонансную область в переходном режиме. Применительно к работе струнной транспортной линии таким переходным режимом является накатывание транспортного модуля на пролеты и скатывание с них.

Если свойственное динамической системе демпфирование недостаточно, чтобы удержать амплитуду переходных резонансных колебаний в допустимых пределах, то необходимо вводить дополнительное демпфирование. В конструкции СТЛ элементом демпфирования является заполнитель корпуса.

Этот раздел посвящен исследованию колебаний СТЛ с учетом упругих и диссипативных свойств корпуса и заполнителя. Решены задачи о движении одиночной нагрузки и потока на СТЛ с разрезным корпусом над опорами и о движении потока нагрузок на бесконечной сплошной СТЛ. Проведен анализ времени затухания длинных и коротких волн после схода нагрузки с пролета, получены условия резонанса при движении потока нагрузок по СТЛ со сплошным и разрезным корпусом.

4.3.1. Одиночная нагрузка на СТЛ с разрезным корпусом

Рассмотрим многопролетную СТЛ со свободно опертым корпусом, имеющим разрезы над опорами. В одно целое линия объединена натянутыми струнами. Очевидно, что в этом случае каждый пролет будет колебаться независимо от остальных и задача сводится к решению системы (4.39) в интервале $0 \leq z \leq l_0$ при соответствующих граничных и начальных условиях. Опоры будем считать жесткими, а нижнюю струну скрепленной с корпусом СТЛ в начальной и конечной точках пролета. Отсюда вытекают следующие граничные и начальные условия

$$\text{при } z = 0, l_0 : u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \quad u_2 = 0, \quad (4.68)$$

$$\text{при } t = 0, l_0 : u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0; \quad u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (4.69)$$

Предположим, что площадь сечения корпуса СТЛ не зависит от координаты z . Тогда уравнения движения (4.39) примут вид

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + EI\mu' \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial z^4} + \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + E_2 \left(1 + \mu_2' \frac{\partial}{\partial t} \right) (u - u_2) = P \delta(z - vt) \sigma \left(0, \frac{l_0}{v} \right), \quad (4.70)$$

Будем искать решения системы (4.70) в виде тригонометрических рядов

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l_0}, \\ u_2(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n}(t) \sin \frac{n\pi z}{l_0}. \quad (4.71)$$

Учитывая, что

$$\delta(z - vt) = \frac{2}{l_0} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi vt}{l_0} \sin \frac{n\pi z}{l_0},$$

получим для определения неизвестных коэффициентов $q_n(t)$, $q_{2n}(t)$, систему уравнений (штрих означает производную по времени)

$$q_n'' + (n_1^4 E_{11} \mu') q_n' - E_{21} \mu_2 q_{2n}' + (n_1^4 E_{11} + n_1^2 T_{11} + E_{21}) q_n - E_{21} q_{2n} = \varphi_n(t), \quad (4.72)$$

$$q_{2n}'' + E_{22} \mu_2 q_{2n}' + E_{22} \mu_2 q_n' + (n_1^2 T_{22} + E_{22}) q_{2n} - E_{22} q_n = 0.$$

Здесь

$$\varphi_n(t) = A \sin \frac{n\pi v t}{l_0} \sigma \left(0, \frac{l_0}{v}\right), \quad A = \frac{2P}{\rho_s l_0}, \quad n_1 = \frac{n\pi}{l_0},$$

$$E_{11} = \frac{EI}{\rho_s}, \quad E_{21} = \frac{E_2}{\rho_s}, \quad E_{22} = \frac{E_2}{\rho_2}, \quad T_{11} = \frac{T_1}{\rho_s}, \quad T_{22} = \frac{T_2}{\rho_2}.$$

Для решения уравнений (4.72) с нулевыми начальными условиями применим интегральное преобразование Лапласа [33]. В результате для трансформант искомым функций получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n(\lambda) \left[\lambda^2 + \lambda (n_1^4 E_{11} \mu' + E_{21} \mu_2) + n_1^4 E_{11} + n_1^2 T_{11} + E_{21} \right] - \\ - \tilde{q}_{2n}(\lambda) [\lambda E_{21} \mu_2 + E_{21}] = \tilde{\varphi}_n(\lambda), \\ \tilde{q}_n(\lambda) [\lambda E_{22} \mu_2 + E_{22}] + \tilde{q}_{2n}(\lambda) [\lambda^2 + \lambda E_{22} \mu_2 + n_1^2 T_{22} + E_{22}] = 0, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$\tilde{q}_n(\lambda) = \tilde{\varphi}_n \tilde{q}_n(\lambda), \quad \tilde{q}_{2n}(\lambda) = \tilde{\varphi}_n \tilde{q}_{2n}(\lambda), \quad (4.73)$$

где

$$\tilde{\varphi}_n(\lambda) = \int_0^{\infty} \varphi_n(t) \exp(-\lambda t) dt, \quad (4.74)$$

$$\tilde{q}_n(\lambda) = \frac{\lambda^2 + n_1^2 T_{22} + E_{22} (\lambda \mu_2 + 1)}{\Delta(\lambda)}, \quad \tilde{q}_{2n}(\lambda) = \frac{E_{22} (\lambda \mu_2 + 1)}{\Delta(\lambda)},$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (4.75)$$

где

$$a_3 = n_1^4 E_{11} \mu' + (E_{21} + E_{22}) \mu_2,$$

$$\begin{aligned} a_2 = n_1^4 E_{11} + n_1^2 (T_{11} + T_{22}) + E_{21} + E_{22} + n_1^4 E_{11} E_{22} \mu' \mu_2 = \\ = a_{20} + n_1^4 E_{11} E_{22} \mu' \mu_2, \end{aligned}$$

$$a_1 = (n_1^6 T_{22} + n_1^4 E_{22}) E_1 \mu' + (n_1^4 E_{11} E_{22} + n_1^2 (T_{22} E_{21} + T_{11} E_{22})) \mu_2,$$

$$a_0 = n_1^6 E_{11} T_{22} + n_1^4 (E_{11} E_{22} + T_{11} E_{22}) + n_1^2 (T_{11} E_{22} + T_{22} E_{21}).$$

Применяя теперь к равенствам (4.73) обратное преобразование Лапласа, получим

$$q_n(t) = \int_0^t \varphi_n(\tau) g_n(t-\tau) d\tau, \quad q_{2n}(t) = \int_0^t \varphi_n(\tau) g_{2n}(t-\tau) d\tau, \quad (4.76)$$

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^4 \operatorname{Res}_{\lambda_k} (\tilde{g}_n(\lambda) \exp(\lambda t)),$$

$$g_{2n}(t) = \sum_{k=1}^4 \operatorname{Res}_{\lambda_k} (\tilde{g}_{2n}(\lambda) \exp(\lambda t)) \quad (4.77)$$

где λ_k — корни уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (4.78)$$

В практически важных случаях μ' , μ_2 малы и корни уравнения (4.78) будут комплексными и попарно сопряженными. Введем для них обозначения

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_1, \quad \lambda_4 = \bar{\lambda}_2$$

(чертой отмечены сопряженные значения).

Применяя теорию вычетов и опуская промежуточные преобразования, получим для $q_n(t)$ следующие выражения

$$q_n(t) = A \sum_{k=1}^2 \left[g_{5k} \sin \gamma_n t + g_{6k} \cos \gamma_n t + \exp(\alpha_k t) (g_{7k} \sin \beta_k t + g_{8k} \cos \beta_k t) \right], \quad 0 \leq t \leq \frac{l_0}{v},$$

$$q_n(t) = A \sum_{k=1}^2 \left\{ \exp\left(\alpha_k \left(t - \frac{l_0}{v}\right)\right) \left[G_{1k} \sin(\delta_{1k} + \beta_k t) + G_{2k} \cos(\delta_{1k} - \beta_k t) + G_{3k} \sin(\delta_{2k} - \beta_k t) + G_{4k} \cos(\delta_{2k} - \beta_k t) \right] + \exp(\alpha_k t) (g_{7k} \sin \beta_k t + g_{8k} \cos \beta_k t) \right\}, \quad t > \frac{l_0}{v}. \quad (4.79)$$

Здесь

$$g_{5k} = -g_{3k} \alpha_k b_{1k} - g_{4k} (\beta_k b_{1k} - \gamma_n b_{2k}),$$

$$g_{6k} = g_{3k} (\beta_k b_{2k} - \gamma_n b_{1k}) - g_{4k} \alpha_k b_{2k},$$

$$g_{7k} = g_{3k} \alpha_k b_{2k} + g_{4k} (\beta_k b_{2k} - \gamma_n b_{1k}),$$

$$g_{8k} = g_{4k} \alpha_k b_{2k} - g_{3k} (\beta_k b_{2k} - \gamma_n b_{1k}),$$

$$G_{1k} = -g_{3k} a_{1k} - g_{4k} d_{1k}, \quad G_{2k} = -g_{4k} a_{1k} - g_{3k} d_{1k},$$

$$G_{3k} = -g_{3k} a_{2k} - g_{4k} d_{2k}, \quad G_{4k} = -g_{4k} a_{2k} - g_{3k} d_{2k},$$

$$b_{1k} = \frac{1}{b_{3k}} + \frac{1}{b_{4k}}, \quad b_{2k} = \frac{1}{b_{4k}} + \frac{1}{b_{3k}},$$

$$b_{3k} = \alpha_k^2 + (\beta_k + \gamma_n)^2, \quad b_{4k} = \alpha_k^2 + (\beta_k - \gamma_n)^2,$$

$$a_{1k} = \frac{\alpha_k}{b_{3k}}, \quad a_{2k} = \frac{\alpha_k}{b_{4k}}, \quad d_{1k} = \frac{\beta_k + \gamma_n}{b_{3k}}, \quad d_{2k} = \frac{\beta_k - \gamma_n}{b_{4k}},$$

$$\delta_{1k} = \pi n + \beta_k \frac{l_0}{v}, \quad \delta_{2k} = -\pi n + \beta_k \frac{l_0}{v}.$$

Тогда, возвращаясь к (4.71), получим расчетное выражение для перемещения $u(z, t)$

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l_0}. \quad (4.80)$$

При необходимости аналогичным образом может быть получена функция $u_2(z, t)$.

Найдем теперь корни λ_k , $k = 1, 2$ уравнения (4.78), учитывая, что для реальных материалов $\mu', \mu_2 < 1$. Так, например, для стали μ' имеет порядок 10^{-4} , для каучука порядок $\mu_2 = 10^{-3}$. На этом основании корни λ_k , как функции от μ', μ_2 , можно искать в виде разложения в ряд по степеням μ', μ_2 :

$$\lambda_k(\mu, \mu_2) = \lambda_k(0, 0) + \frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu} \mu' + \frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu} \mu_2 + \dots \quad (4.81)$$

причем $\lambda_k(0, 0)$ является корнем уравнения

$$\lambda^4 + a_{20} \lambda^2 + a_0 = 0, \quad (4.82)$$

откуда

$$\lambda_k^2(0, 0) = 0,5 \left(-a_{20} + (-1)^k D^{1/2} \right), \quad (4.83)$$

$$D = \left[n_1^4 E_{11} + n_1^2 (T_{11} - T_{22}) + E_{21} - E_{22} \right]^2 + 4E_{21} E_{22} = D_1^2 + 4E_{21} E_{22}$$

$$D_1 = n_1^4 E_{11} + n_1^2 (T_{11} - T_{22}) + E_{21} - E_{22}.$$

Поскольку при любых значениях постоянной D , параметры a_{20} и a_0 положительны, то

$$\lambda_k^2(0, 0) < 0, \quad k = 1, 2,$$

то

$$\lambda_k^2(0, 0) < \frac{i}{\sqrt{2}} \left[a_{20} - (-1)^k D^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (4.84)$$

Дифференцируя уравнение (4.78) последовательно по μ' и μ_2 , найдем

$$\frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu_1} = \frac{1}{4} n_1^4 E_{11} \left[-1 + \frac{(-1)^k D_1}{D^{1/2}} \right], \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{4} (E_{21} + E_{22}) - \frac{D_1 (E_{22} - E_{21}) - 4E_{21}E_{22}}{4(-1)^k D^{1/2}}. \quad (4.86)$$

Если ограничиться тремя членами ряда, то подставив (4.84) — (4.86) в разложение (4.81), получим приближенные значения корней λ_k . Ясно, что

$$\beta_k = \left[0,5 \left(a_{20} - (-1)^k D^{1/2} \right) \right]^{1/2},$$

$$\alpha_k = \frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu} \mu' + \frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu_2} \mu_2, \quad k = 1, 2. \quad (4.87)$$

Представляет интерес оценка промежутка времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается до некоторого заданного значения. Коэффициенты α_k зависят от n и характеризуют скорость затухания стоячей волны, длина которой равна l_0/n . Действительно, i -кратное уменьшение амплитуды такой волны произойдет через промежуток времени

$$t_i(n) = \max_{k=1,2} \frac{\ln 1/i}{\alpha_k(n)} = \frac{\ln i}{\min_{k=1,2} (-\alpha_k(n))}. \quad (4.88)$$

Найдем сначала t_1 для волн большой длины, т.е. будем считать, что $n = 1, 2, \dots, n_2$ и, кроме того, справедливо соотношение

$$|\eta(n)(\eta(n) + 2E_0)| < 1, \quad (4.89)$$

где

$$\eta(n) = \frac{n_1^4 E_{11} + n_1^2 (T_{11} - T_{22})}{E_{21} + E_{22}}, \quad E_0 = \frac{E_{21} - E_{22}}{E_{21} + E_{22}}.$$

Неравенство (4.89) выполняется, например, при исходных данных

$$n_2 = 1, \quad l_0 = 50 \text{ м}, \quad T_{11}, T_{22} \leq 10^7 \text{ Н}, \quad E_{21}, E_{22} \geq 10^5 \text{ Па}, \quad E_{11} < 10^9 \text{ Па}.$$

Преобразуя величины (4.85) — (4.86), получим

$$\frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu'} = \frac{1}{4} n_1^4 E_{11} \left(-1 + (-1)^k \frac{\eta(n) + E_0}{[1 + 2E_0 \eta(n) + \eta^2(n)]^{1/2}} \right) \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu_2} =$$

$$= -\frac{E_{21} + E_{22}}{4} \left(1 - \frac{E_0 \eta(n) + 1}{(-1)^k [1 + 2E_0 \eta(n) + \eta^2(n)]^{1/2}} \right) \quad (4.91)$$

Разлагая правые части равенств (4.90), (4.91) в ряды по степеням η и удерживая члены до второго порядка включительно, имеем

$$\frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu'} = \frac{1}{4} n_1^4 E_{11} \left[-1 + (-1)^k \left(E_0 + \eta(n) (1 - E_0^2) \eta^2(n) \right) \right],$$

$$\frac{\partial \lambda_k(0, 0)}{\partial \mu_2} = \frac{E_{11} + E_{22}}{4} \left[-1 + (-1)^k \left(1 - \frac{1}{2} (1 - E_0^2) \eta^2(n) \right) \right] \quad (4.92)$$

Минимальным значение $-\alpha_k$ будет, очевидно, при $k = 2$, т.е.

$$\min_{k=1,2} (-\alpha_k) = \frac{n_1^4 E_{11}}{4} (1 - E_0) \left[(1 + E_0) \eta(n) + \right.$$

$$\left. + (1 + E_0) E_0 \eta^2(n) + 1 \right] \mu' + \mu_2 \frac{E_{21} + E_{22}}{8} (1 - E_0)^2 \eta^2(n) \quad (4.93)$$

Пример расчета. Примем $E_{11} = 1 \text{ Па}$, $E_{21} = 1 \text{ Па}$, $E_{22} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $T_{11} = 10^6 \text{ Н}$, $T_{22} = 0,5 \cdot 10^7 \text{ Н}$, $l_0 = 50 \text{ м}$. Из анализа $\eta(n)$ следует, что для таких значений параметров можно взять $n_2 = 10$ и $\eta(n) \approx -10^{-3} n^2$. Тогда равенство (4.81) упрощается

$$\min_{k=1,2} (-\alpha_k) = 0,025n^4 (1 + 1,33 \cdot 10^{-3} n^2 + 0,66 \cdot 10^{-6} n^4) \mu' +$$

$$+ 0,43n^4 \mu_2 \approx n^4 (0,025\mu' + 0,43\mu_2), \quad n \leq 10,$$

и из (4.88) получим время, например, десятикратного уменьшения амплитуды волн

$$t_{10}(n) = \frac{\ln 10}{\min_{k=1,2} (-\alpha_k)} = \frac{5,34}{n^4 (0,058\mu' + \mu_2)}, \quad n \leq 10. \quad (4.94)$$

Отсюда следует, что если коэффициенты μ' , μ_2 имеют порядок 10^{-3} , то порядок $t_{10}(1)$ равен 10^3 с (17 минут), а $t_{10}(10)$ имеет порядок 0,1 сек. Следовательно, после схода нагрузки с пролета прогиб пролета уменьшается неравномерно по длинам волн: чем короче волна, тем быстрее она затухает. Быстрое затухание самых длинных волн, как следует из формулы (4.94), не может быть обеспечено лишь диссипативными свойствами материалов СТЛ. Напомним, что эти выводы верны лишь для тех длин волн (величины n), для которых справедливо неравенство (4.89).

Найдем теперь $t_1(n)$ для больших n , т.е. для очень коротких волн. Будем считать, что $n > n_3$ и выполняется неравенство

$$\frac{1 + 2E_0 \eta(n_3)}{\eta^2(n_3)} < 1. \quad (4.95)$$

(Для данных рассмотренного примера $n_3 = 112$).

Разложим правые части равенств (4.90), (4.91) в ряды по степеням $\frac{1}{\eta(n)}$ и ограничимся членами $\frac{1}{\eta^2}$.

$$\frac{\partial \lambda_k(0,0)}{\partial \mu'} = \frac{1}{4} n_1^4 E_{11} \left[-1 + (-1)^k \left(1 - \frac{1}{2} (1 - E_0)^2 \frac{1}{\eta^2} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_k(0,0)}{\partial \mu_2} &= \\ &= \frac{E_{21} + E_{22}}{4} \left[1 + (-1)^k \left(E_0 + \frac{1}{\eta} (1 - E_0)^2 + \frac{3}{2} E_0 (E_0^2 - 1) \frac{1}{\eta^2} \right) \right], \\ & \quad n \geq 112. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \min_{k=1,2} (-\alpha_k) &\approx \frac{E_{22}}{2} \left(\frac{l_0 E_{21}}{\pi_4 E_{11} n^4} \mu' + \mu_2 \right) = \\ &= 0,25 \cdot 10^6 \left(\frac{6,43 \cdot 10^6}{n^4} \mu' + \mu_2 \right), \quad n \geq 112. \end{aligned} \quad (4.96)$$

В частности, для $n = 112$

$$\min_{k=1,2} (-\alpha_k) = 0,25 \cdot 10^6 (4,1 \cdot 10^{-2} \mu' + \mu_2). \quad (4.97)$$

Подставив (4.96), (4.97) в равенство (4.88), получим

$$\begin{aligned} t_{10}(n) &= \frac{0,92 \cdot 10^{-5}}{\frac{6,43 \cdot 10^6}{n^4} \mu' + \mu_2}, \quad t_{10}(112) = \frac{0,92 \cdot 10^{-5}}{4,1 \cdot 10^{-2} \mu' + \mu_2}, \\ & \quad n \geq 112. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Отсюда следует, что время десятикратного уменьшения амплитуды волн длины l_0/n , $n \geq 112$ имеет порядок 0,01 сек, если порядок коэффициентов μ' , μ_2 равен 10^{-3} . Из равенств (3.31) и (3.27) следует также, что при одинаковых значениях μ' , μ_2 вклад в обеспечение затухания волн материала корпуса СТЛ по сравнению с заполнителем, работающим на сжатие—растяжение между струнами, меньше в 17 раз для больших длин и в $24 \cdot \left(\frac{112}{n}\right)^{-4}$ раз для длин l_0/n , $n \geq 112$. Значит, если предположить, что $\mu_2 = 0$, а $\mu' \neq 0$ (заполнитель не рассеивает энергию при сжатии—растяжении), то короткие волны (n — велико) будут

затухать весьма медленно, т.е. СТЛ будет длительное время "звучать". В связи с этим большое значение имеет подбор заполнителя с хорошими демпфирующими свойствами.

4.3.2. Поток нагрузок на СТЛ с разрезным корпусом

Постановка и решение задачи. Пусть по струнной транспортной линии, рассмотренной в п. 4.3.1, движутся одинаковые сосредоточенные нагрузки равные P с постоянной скоростью v и на равном расстоянии l' одна от другой. До начала движения нагрузок СТЛ находилась в равновесии. Если коэффициенты демпфирования μ' и μ_2 отличны от нуля, то собственные колебания СТЛ являются затухающими и, следовательно, через некоторое время движение линии будет стационарным. Опишем стационарный режим вынужденных колебаний СТЛ.

Уравнения движения пролета имеют вид

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \mu' EI \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial z^4} + \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + E_2 \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u - u_2) = f(z, t) \quad (4.99)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - T_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + E_2 \left(1 + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) (u_2 - u) = 0.$$

Поскольку $l' \geq l_0$, то длительность движения нагрузки по пролету $t_1 = l_0/v$ меньше временного интервала $t_2 = l'/v$ между соседними нагрузками. Следовательно, в течение времени $2t_3$ ($t_3 = 0,5(t_2 - t_1)$) на пролете нагрузка отсутствует. Для удобства дальнейших выкладок будем считать, что первая нагрузка появляется на пролете в момент времени $t = t_3$. Тогда ее воздействие описывается функцией

$$f(z, t) = P \delta(z - v(t - t_3)) \sigma(t_3, t_1 + t_3) \quad (4.100)$$

Через промежуток времени $2t_3$ после схода с пролета первой нагрузки на нем появляется вторая, т.е. воздействие нагрузок на пролет повторяется с периодом t_2 . Следовательно, для описания воздействия потока нагрузок на пролет необходимо для функции $f(z, t)$ вместо формулы (4.100) записать выражение

$$f(z, t) = \begin{cases} P \delta(z - v(t - t_3)) \sigma(t_3, t_1 + t_3), & 0 \leq t \leq t_2 \\ f(z, t + t_2) = f(z, t). \end{cases} \quad (4.101)$$

По аналогии с предыдущим разделом ищем решение системы (4.99) в виде (4.71). Тогда функции $q_n(t)$, $q_{2n}(t)$ найдутся из уравнений

$$q_n'' + (n_1^4 E_{11} \mu' + E_{21} \mu_2) \dot{q}_n - E_{21} \mu_2 \dot{q}_{2n} + (n_1^4 E_{11} + n_1^2 T_{11} + E_{21}) q_n - E_{21} q_{2n} = A \varphi_n(t), \quad (4.102)$$

$$q_n'' + E_{22} \mu_2 \dot{q}_{2n} - E_{22} \mu_2 \dot{q}_n + (n_1^2 T_{22} + E_{22}) q_{2n} - E_{22} q_n = 0,$$

где

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sin \frac{n\pi v}{l_0} (t - t_3) \sigma(t_3, t_1 + t_3), & 0 \leq t \leq t_2, \\ \varphi_n(t + t_2) = \varphi_n(t + t_2) = \varphi_n(t). \end{cases} \quad (4.103)$$

При n — нечетном $\varphi_n(t)$ (4.103) — четная функция, а при четном n — нечетная. Тогда $\varphi_n(t)$ можно аппроксимировать рядами

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2} A_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \cos \varepsilon_k t, \quad t \geq 0, \quad n — \text{нечетно}, \quad (4.104)$$

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_{nk} \cos \varepsilon_k t, \quad t \geq 0, \quad n — \text{четно}, \quad (4.105)$$

где

$$A_{nk} = \frac{2}{t^2} \int_{t_3}^{t_1+t_3} \sin \gamma_n(t - t_3) \cos \varepsilon_k t \, dt, \quad n — \text{нечетно}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.106)$$

$$S_{nk} = \frac{2}{t^2} \int_{t_3}^{t_1+t_3} \sin \gamma_n(t - t_3) \sin \varepsilon_k t \, dt, \quad n — \text{четно}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.107)$$

$$\gamma_n = \frac{n\pi\nu}{l_0}, \quad \varepsilon_k = \frac{k\pi}{l} = \alpha\gamma_k, \quad \alpha = \frac{l_0}{l}.$$

Вычислив интегралы (4.106), (4.107), найдем коэффициенты ряда да $A_{n0} = \frac{4\alpha}{\pi n}$,

$$A_{nk} = \begin{cases} 0, & k - \text{нечетное,} \\ 4 \frac{\alpha}{\pi} n (-1)^{k/2} \cos \frac{k\pi\alpha}{2}, & k - \text{четное, } n - \text{нечетное} \end{cases}$$

$$S_{nk} = \begin{cases} 0, & k - \text{нечетное,} \\ 4 \frac{\alpha}{\pi} n (-1)^{k/2+1} \sin \frac{k\pi\alpha}{2}, & k, n - \text{четные} \end{cases}$$

Заметим, что при $\alpha = 1$ имеем

$$A_{nk} = \frac{4n}{\pi(n^2 - k^2)}, \quad S_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}$$

Систему (4.103) решаем с помощью преобразования Лапласа. Учитывая нулевые начальные условия, получим

$$\bar{q}(\lambda) = A \bar{\varphi}_n(\lambda) D_n(\lambda), \quad (4.108)$$

где

$$D_n(\lambda) = \frac{\lambda^2 + n_1^2 T_{22} + E_{22}(1 + \mu_2 \lambda)}{\Delta_n(\lambda)}, \quad (4.109)$$

$$\bar{\varphi}_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{A_{n0}}{2\lambda} + \sum_{k=2}^{\infty} A_{nk} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \varepsilon_k^2}, & n - \text{нечетное, } k - \text{четное,} \\ \sum_{k=2}^{\infty} S_{nk} \frac{\varepsilon_k}{\lambda^2 + \varepsilon_k^2}, & n, k - \text{четные.} \end{cases} \quad (4.110)$$

Поскольку нас интересует установившееся движение пролета, то при нахождении $q_n(t)$ из равенства (4.108) необходимо учесть лишь

полюсы функции $\varphi_n(\lambda)$. Применяя к равенству (4.108) обратное преобразование Лапласа, найдем

$$q_n(t) = \begin{cases} \frac{A_{n0} D_n(0)}{\eta} + \sum_{k=2}^{\infty} A_{nk} [\operatorname{Re} D_n(i\varepsilon_k) \cos \varepsilon_k t + \operatorname{Im} D_n(i\varepsilon_k) \sin \varepsilon_k t], & n - \text{нечетное, } k - \text{четное,} \\ \sum_{k=2}^{\infty} S_{nk} [\operatorname{Re} D_n(i\varepsilon_k) \sin \varepsilon_k t + \operatorname{Im} D_n(i\varepsilon_k) \cos \varepsilon_k t] A_{nk}, & n, k - \text{четные.} \end{cases} \quad (4.111)$$

Здесь

$$\operatorname{Re} D_n(i\varepsilon_k) = \frac{R_{1n} R_n - J_{1n} J_n}{R_n^2 + J_n^2}, \quad \operatorname{Im} D_n(i\varepsilon_k) = \frac{J_{1n} R_n + J_n R_{1n}}{R_n^2 + J_n^2};$$

$$R_{1n} = n_1^2 T_{22} + E_{22} - \varepsilon_k^2; \quad J_{1n} = E_{22} \mu_2;$$

$$R_n = \varepsilon_k^4 - a_2 \varepsilon_k^2 + a_0; \quad J_n = (a_1 - a_3 \varepsilon_k^2) \varepsilon_k.$$

Подставив функцию (4.111) в разложение (4.71), получим прогиб пролета под действием потока нагрузок.

Динамический прогиб $u(z, t)$ представим в виде суммы

$$u(z, t) = u_0(z) + u_{kol}(z, t), \quad (4.112)$$

где стационарная составляющая прогиба имеет вид

$$u_0(z) = \frac{4P}{\pi l \rho_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(0)}{n} \sin \frac{n\pi z}{l_0}, \quad n - \text{нечетное.} \quad (4.113)$$

Итак, функция $u_0(z)$ задает неизменяющуюся со временем форму пролета, относительно которой происходят его колебания при движении потока нагрузок. Эти колебания описываются колебательной составляющей $u_{kol}(z, t)$.

Из равенства (4.113) следует, что величина стационарной составляющей прогиба в любой точке пролета пропорциональна отношению P/l (средней плотности нагрузки на СТЛ) и не зависит от величины скорости движения нагрузок. Легко видеть, что график функции $u_0(z)$ симметричен относительно вертикальной прямой, проходящей

через середину пролета. Это значит, что $u_0(z)$ не зависит также и от направления движения нагрузок. Максимальное значение прогиба $u_0^{\max}(z)$ достигается в середине пролета

$$u_0^{\max} = \frac{4P}{\pi l \rho_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(0)}{n} (-1)^{[n/2]}, \quad n - \text{нечетное}, \quad (4.114)$$

Чтобы упростить дальнейший анализ, будем считать, что нижняя струна скреплена с корпусом СТЛ, что равносильно очень большой жесткости заполнителя. После предельного перехода в равенстве (4.113) при $E_2 \rightarrow \infty$ получим

$$u_0(z) = \frac{4P}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi z}{l_0}}{n \left(\frac{n\rho}{l_0}\right)^{1/2} \left[EI \left(\frac{n\pi}{l_0}\right)^2 + T \right]}, \quad n - \text{нечетное}, \quad (4.115)$$

где

$$T = T_1 + T_2.$$

Функцию (4.115) можно понимать как статический прогиб пролета под действием распределенной нагрузки с плотностью $f_0(z)$. Поскольку $u_0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$EI \frac{d^4 u_0}{dz^4} - T \frac{d^2 u_0}{dz^2} = f_0, \quad (4.116)$$

с условиями

$$u(0) = \frac{d^2 u(0)}{dz^2} = u(l_0) = \frac{d^2 u(l_0)}{dz^2}, \quad (4.117)$$

то

$$f_0(z) = \frac{4P}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi z}{l_0}, \quad n - \text{нечетное}. \quad (4.118)$$

Выражение (4.118) упростится, если учесть, что на интервале $[0, l_0]$ разложение единицы в ряд по синусам имеет вид

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi z}{l_0}, \quad n - \text{нечетное}.$$

Тогда $f_0(z) = P/l$, т.е. $u_0(z)$ — статический прогиб пролета от равномерно распределенной нагрузки с плотностью P/l . Теперь, зная f_0 , можно решить задачу (4.116), (4.117), найти $u_0(z)$ и просуммировать ряд (4.115).

Найдем приближенно u_0^{\max} из (4.115), ограничившись благодаря быстрой сходимости данного ряда лишь первым членом.

$$u_0^{\max} = \frac{4P}{\pi l \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 \left[EI \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 + T \right]}. \quad (4.119)$$

Если взять, например, $l' = l_0$, $l_0 = 100$ м, $P = 10^4$ Н, $T = 10^7$ Н, $EI = 10^5$ Н·м², то $u_0^{\max} \sim 0,13$ м. Важной характеристикой колебательных систем являются резонансные параметры. Для определения резонансных режимов движения достаточно найти условия, при которых амплитуда колебаний функции $q_n(t)$ достигает максимального значения при μ' , μ_2 и обращается в бесконечность для μ' , $\mu_2 = 0$.

Известно, что при малом демпфировании резонансные частоты незначительно отличаются от резонансных частот при отсутствии демпфирования, поэтому для упрощения выкладок будем полагать $\mu' = \mu_2 = 0$. Тогда

$$\text{Im } D_n(i\epsilon_k) = 0, \quad \text{Re } D_n(i\epsilon_k) = \frac{n_1^2 T_{22} + E_{22} - \epsilon_k^2}{\epsilon_k^4 - a_{20} \epsilon_k^2 + a_0}$$

и необходимым условием резонанса будет условие

$$\epsilon_k^4 - a_{20} \epsilon_k^2 + a_0 = 0. \quad (4.120)$$

Отсюда получаем

$$\epsilon_k^2 = \frac{1}{2} \left(a_{20} + \left(a_{20}^2 - 4a_0 \right)^{1/2} \right)$$

или

$$\left(\frac{v}{l}\right)^2 = \frac{1}{2k^2\pi^2} (a_{20} + D^{1/2}). \quad (4.121)$$

Здесь индексы k, n принимают значения, при которых $A_{nk} \neq 0$, $S_{nk} \neq 0$.

Исследуем условие (4.121) более подробно для случая

$$\frac{n_1^4 E_{11} + n_1^2 (T_{11} + T_{22})}{E_{21} + E_{22}} < 1. \quad (4.122)$$

Поскольку $n_1 = \frac{n\pi}{l_0}$, то условие (4.122) будет выполняться для $n = \overline{1, n_4}$, когда E_2 достаточно велико, т.е. жесткость заполнителя превалирует над жесткостью корпуса и суммарным натяжением струн для больших длин волн. Тогда вместо (4.121) получим приближенно

$$\frac{v}{l_2} = \frac{(E_{21} + E_{22})^{1/2}}{k\pi}, \quad (4.123)$$

либо

$$\left(\frac{v}{l_2}\right)^2 = \frac{1}{2k^2\pi^2} [n_1^4 E_{11} + n_1^2 (T_{11} + T_{22})]. \quad (4.124)$$

Соотношение (4.124) дает резонансный режим колебаний пролета со струнами как одного целого без учета сжатия—растяжения заполнителя, а (4.123) — условие резонанса корпуса с верхней струной и нижней струны во встречных колебаниях за счет деформации заполнителя. Поскольку амплитуда встречных колебаний не может неограниченно возрастать (нижняя струна не может выйти за пределы корпуса), то условие (4.123) можно исключить из рассмотрения.

Таким образом, условием резонанса волн длины l_0/n ($n \leq n_4$) при выполнении неравенства (4.122) является равенство (4.124), которое можно записать так

$$v = \frac{nl'}{kl_0} = \left(\frac{n^2\pi^2 E_1/l_0 + T_1 + T_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2}. \quad (4.125)$$

Предположим теперь, что выполняется неравенство

$$\frac{E_{11} + E_{22}}{n_1^4 E_{11} + n_1^2 (T_{11} + T_{22})} < 1, \quad n \geq n_5, \quad (4.126)$$

когда жесткость корпуса СТЛ и натяжения струн преобладают над жесткостью заполнителя для волн длины l_0/n , $n \geq n_5$. Тогда из равенства (4.121) приближенно получим

$$v = \frac{nl'}{kl_0} T_{22}^{1/2}, \quad (4.127)$$

или

$$v = \frac{nl}{kl_0} \left[\left(\frac{n\pi}{l_0} \right)^2 E_{11} + T_{11} \right]^{1/2}, \quad n \geq n_5 \quad (4.128)$$

Нетрудно убедиться, что (4.127) — условие резонанса при отклонениях корпуса и нижней струны одного знака. Следовательно, оба условия (4.127) и (4.128) дают резонансные режимы для коротких волн при выполнении неравенства (4.126). Напомним, что в условиях (4.121), (4.127), (4.128) величины k, n принимают значения, при которых A_{nk}, S_{nk} отличны от нуля.

Заметим, что из полученных условий резонанса при соответствующих предположениях получаются частные случаи резонанса гибкой СТЛ, рассмотренные в п.4.2.3.

4.3.3. Поток нагрузок на СТЛ с разрезным корпусом при l_0 , кратном l

Так как длина пролета l_0 кратна расстоянию между нагрузками l' , то

$$l_0 = sl',$$

где s — количество одновременно находящихся на пролете нагрузок. Если считать, что в начальный момент времени одна из нагрузок находится над опорой, воздействие потока нагрузок на пролет определяется функцией

$$f(z, t) = P \sum_{i=1}^s \delta [z - v(t + (i-1)t_2)], \quad t \in [0; t_2],$$

$$f(z, t + t_2) = f(z, t) \quad (4.129)$$

Здесь

$$t_1 = \frac{l_0}{v}, \quad t_2 = \frac{l}{v} = \frac{t_1}{s}.$$

По аналогии с п.4.3.2 представим решение системы (4.99) в виде (4.71), получая систему (4.102), где

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^s \sin \gamma_n [t + (i-1)t_2], \quad t \in [0; t_2]; \quad (4.130)$$

Нетрудно убедиться, что $\varphi_n(t)$ при нечетном n — четная функция, а при четном n — нечетная для любого $s = 1, 2, \dots$. Кроме того, при четном n $\varphi_n(t) = 0$ для четных s .

Тогда при $t \geq 0$

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2} A_{n0}(s) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(s) \cos \varepsilon_k t, \quad n - \text{нечетно},$$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} S_{nk}(s) \sin \varepsilon_k t, & n - \text{четное}, s - \text{нечетное}; \\ 0, & n, s - \text{четные}. \end{cases} \quad (4.131)$$

Здесь

$$A_{nk}(s) = \frac{2}{t_2} \sum_{i=1}^s \int_0^{t_2} \sin \gamma_n (t + (i-1)t_2) \cos \varepsilon_k t dt, \quad n - \text{нечетное},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$S_{nk}(s) = \frac{2}{t_2} \sum_{i=1}^s \int_0^{t_2} \sin \gamma_n (t + (i-1)t_2) \cos \varepsilon_k t dt, \quad n - \text{четное},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.132)$$

Вычислив интегралы (4.132), получим

$$A_{nk}(s) = \begin{cases} 0, & k - \text{нечетное}, \\ \frac{4sn}{\pi(n^2 - s^2k^2)}, & k - \text{четное}, n - \text{нечетное}, \end{cases}$$

$$S_{nk}(s) = \begin{cases} 0, & k - \text{нечетное}, \\ 0, & k - \text{четное}, ks \neq n, \\ s, & k - \text{четное}, ks = n. \end{cases} \quad (4.133)$$

Таким образом, для получения установившегося режима движения достаточно подставить величины (4.133) в формулы (4.111) и (4.71). Условия резонанса для рассматриваемого случая совпадают с условиями (4.121), (4.125), (4.127), (4.128), в которых α нужно заменить на s , а считать нечетным либо равным ks .

4.3.4. Поток нагрузок на бесконечной сплошной СТЛ при l_0 кратном l'

Постановка и решение задачи в общем случае. Предположим, что поток нагрузок движется по бесконечной СТЛ со сплошным неразрезным корпусом, свободно опертым на недеформируемые опоры. Корпус нижней струны будем считать жестко скрепленным с корпусом СТЛ над опорами, а расстояние между нагрузками $l' = l_0/s$, где s — целое число.

Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания СТЛ под действием движущихся нагрузок. Период колебаний определяется, очевидно, соотношением скорости движения и длины пролета

$$t_2 = \frac{l'}{v} = \frac{l_0}{sv} = \frac{t_1}{s}.$$

Разобьем линию на участки длиной l_0 . Легко видеть, что эти участки находятся в одинаковых динамических условиях. Следовательно, динамический прогиб СТЛ есть функция периодическая по z с периодом l_0 . На этом основании функции $u(z, t)$, $u_2(z, t)$ можно записать в виде бесконечного экспоненциального ряда

$$u(z, t) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} U_{nk} \exp \left[2\pi i \left(k \frac{t}{t_k} + n \frac{x}{l_0} \right) \right], \quad (4.134)$$

$$u_2(z, t) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} S_{nk} \exp \left[2\pi i \left(k \frac{t}{l_0} + n \frac{z}{l_0} \right) \right]. \quad (4.135)$$

Тогда воздействие нагрузок и реакция опоры на корпус СТЛ и нижнюю струну на выделенном участке определяется функциями

$$f(z, t) = R(t) \delta(z) + P \sum_{j=1}^s \delta \left[z - v \left(t - \frac{t_1 + t_2}{2} + jt_2 \right) \right], \quad (4.136)$$

$$f_2(z, t) = R_2(t) \delta(z), \quad z \in \left[-\frac{l_0}{2}; \frac{l_0}{2} \right], \quad t \in \left[-\frac{t_2}{2}; \frac{t_2}{2} \right], \quad (4.137)$$

где $R(t)$, $R_2(t)$ — реакция опоры на корпус СТЛ и нижнюю струну соответственно.

Поскольку $f(z, t)$, $f_2(z, t)$ являются периодическими функциями, разложение в ряд будет аналогично выражениям для прогиба (4.134) и (4.135)

$$f(z, t) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} f_{nk} \exp \left[2\pi i \left(k \frac{t}{l_0} + n \frac{z}{l_0} \right) \right], \quad (4.138)$$

$$f_2(z, t) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} C_{nk} \exp \left[2\pi i \left(k \frac{t}{l_0} + n \frac{z}{l_0} \right) \right], \quad (4.139)$$

где

$$f_{nk} = \frac{1}{l_0 t_2} \int_{-t_2/2}^{t_2/2} \exp \left(-2\pi i k \frac{t}{l_0} \right) dt \cdot \int_{-l_0/2}^{l_0/2} f(z, t) \exp \left(-2\pi i n \frac{z}{l_0} \right) dz, \quad (4.140)$$

$$C_{nk} = \frac{1}{l_0 t_2} \int_{-t_2/2}^{t_2/2} \exp \left(-2\pi i k \frac{t}{l_0} \right) dt \cdot \int_{-l_0/2}^{l_0/2} f_2(z, t) \exp \left(-2\pi i n \frac{z}{l_0} \right) dz. \quad (4.141)$$

Функции $u(z, t)$, $u_2(z, t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$E_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \mu' E_{11} \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial z^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + E_{21} \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u - u_2) = \frac{1}{\rho} f(z, t), \quad (4.142)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - T_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + E_{22} \left(1 + \mu_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (u_2 - u) = \frac{1}{\rho_2} f_2(z, t).$$

Подставляя в уравнения движения корпуса и нижней струны (4.142) аппроксимации (4.134), (4.135) и (4.138), (4.139) с учетом граничных условий на жестких опорах

$$u(0, t) = 0, \quad u_2(0, t) = 0, \quad (4.143)$$

определяются неизвестные коэффициенты v_{nk} , S_{nk} и f_{nk} , C_{nk} (изложение преобразований опускаем ввиду громоздких промежуточных выражений).

Для определения динамического прогиба участка СТЛ осталось выделить действительную часть функции $u(z, t)$, чем и завершается решение задачи. Формулы, дающие $\text{Re } u(z, t)$ громоздки, и мы их здесь не выписываем.

Заметим, что изложенным способом может быть решена задача для бесконечной СТЛ на упругих опорах, по которой движется поток нагрузок при $l' > l_0$.

Для получения некоторых качественных результатов упростим задачу, считая материал заполнителя СТЛ недеформируемым (E_2 бесконечно велико) или, что то же самое, нижнюю струну скрепленной с корпусом СТЛ. Решение этой задачи может быть получено из приведенного решения предельным переходом при $E_2 \rightarrow \infty$. Более наглядным, однако, является последовательное решение упрощенной задачи.

Движение СТЛ в этом случае описывается уравнением

$$EI \frac{\partial^4}{\partial z^4} \left(1 + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) u + \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(z, t), \quad (4.144)$$

где функции $u(z, t)$, $f(z, t)$ имеют вид (4.134) и (4.138). После подстановки этих функций в уравнение (4.144) получим

$$R_0 + Ps = 0,$$

$$l_0 U_{nk} \Delta_{nk} = R_k + P \varphi_{nk}, \quad |n| + |k| \neq 0, \quad (4.145)$$

где

$$\Delta_{nk} = \operatorname{Re} \Delta_{nk} + i \operatorname{Im} \Delta_{nk},$$

$$\operatorname{Re} \Delta_{nk} = EIn_6^4 - \rho_s k_6^2 + Tn_6^2,$$

$$\mu' EIn_6^4 k_6 = \operatorname{Im} \Delta_{nk}.$$

Из условия равенства нулю прогиба СТЛ над опорой имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} U_{nk} = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.146)$$

Из уравнений (4.145), (4.146) определим коэффициенты U_{nk} , R_k и выделим действительную часть функции $u(z, t)$. Опуская промежуточные выкладки, запишем динамический прогиб СТЛ в виде

$$u(z, t) = U_{00} + \frac{1}{l_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{Re} R_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{nk} \cos \beta_{nk} + B_{nk} \sin \beta_{nk}) \right] = \\ = \operatorname{Im} R_k \sum_{k=-\infty}^{\infty} (B_{nk} \cos \beta_{nk} - A_{nk} \sin \beta_{nk}) + \quad (4.147)$$

$$+ P \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{nk} (A_{nk} \cos \beta_{nk} + B_{nk} \sin \beta_{nk}), \quad |n| + |k| \neq 0,$$

Здесь

$$A_{nk} = \frac{\operatorname{Re} \Delta_{nk}}{|\Delta_{nk}|^2}, \quad B_{nk} = \frac{\operatorname{Im} \Delta_{nk}}{|\Delta_{nk}|^2}, \quad \beta_{nk} = n_6 z + k_6 t,$$

$$|\Delta_{nk}|^2 = (\operatorname{Re} \Delta_{nk})^2 + (\operatorname{Im} \Delta_{nk})^2,$$

$$\operatorname{Re} R_k = -P \frac{A_k C_k + B_k D_k}{A_k^2 + B_k^2}, \quad \operatorname{Im} R_k = -P \frac{A_k D_k - B_k C_k}{A_k^2 + B_k^2},$$

$$A_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{jk}, \quad B_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{jk},$$

$$C_k = \frac{s(-1)^{(1-s)k} \operatorname{Re} \Delta_{-ks,k}}{|\Delta_{-ks,k}|^2}, \quad D_k = \frac{s(-1)^{(1-s)k} \operatorname{Im} \Delta_{-ks,k}}{|\Delta_{-ks,k}|^2},$$

$$\operatorname{Re} R_0 = -Ps, \quad \operatorname{Im} R_0 = 0, \quad U_{00} = \frac{P}{l} A_0, \quad A_0 = \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Re} \Delta_{j0}},$$

$$\varphi_{nk} = \begin{cases} s(-1)^{(1-s)k}, & n = -ks; \\ 0, & n \neq -ks. \end{cases}$$

Динамический прогиб (4.147) можно представить в виде суммы стационарной и колебательной составляющих

$$u(z, t) = u_0(z) + u_{kol}(z, t),$$

где

$$u_0(z) = \frac{Ps}{l_0} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - \cos \beta_{n0}}{\operatorname{Re} \Delta_{n0}} = \frac{2P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n_6 z}{EIn_6^4 + Tn_6^2}. \quad (4.148)$$

Из данного представления следует, что колебания пролета СТЛ происходят относительно некоторого отличного от горизонтального стационарного прогиба $u_0(z)$. Величина этого прогиба в силу равенства (4.148) в каждой точке пролета пропорциональна сумме находящихся на пролете нагрузок, которая приходится на единицу длины пролета. Проведем более подробный анализ функции $u_0(z)$.

Легко убедиться, что прогиб $u_0(z)$ симметричен относительно вертикальной прямой, проходящей через середину пролета. Это следует из того, что указанным свойством обладает график каждого члена ряда (4.148). Следовательно, стационарная составляющая динамического прогиба не зависит от направления и скорости движения нагрузок.

Функцию $u_0(z)$ можно интерпретировать как статический прогиб пролета от распределенной нагрузки с некоторой плотностью $f_0(z)$. Найдем эту плотность при $z \in [0; l_0/2]$, т.е. для половины пролета. Поскольку

$$f_0(z) = EI \frac{d^4 u_0}{dz^4} - T \frac{d^2 u_0}{dz^2},$$

то

$$f_0(z) = -\frac{2Ps}{l_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n z}{l_0}. \quad (4.149)$$

Учитывая, что разложение функции $\delta(z)$ в ряд по косинусам на промежутке $[0; l_0/2]$ имеет вид

$$\delta(z) = \frac{2}{l_0} + \frac{4}{l_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n z}{l_0},$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n z}{l_0} = \frac{l_0}{4} \delta(z) - \frac{1}{2}.$$

Подстановкой этого ряда в равенство (4.149) получаем

$$f_0(z) = \frac{Ps}{l_0} - \frac{Ps}{2} \delta(z), \quad z \in [0; l_0/2].$$

Легко видеть, что при рассмотрении промежутка $[-l_0/2; 0]$ придем к такому же результату. Следовательно,

$$f_0(z) = \frac{Ps}{l_0} - Ps \delta(z), \quad z \in [-l_0/2; l_0/2]. \quad (4.150)$$

Поскольку $-Ps \delta(z) = R_0 \delta(z)$ — реакция опоры в точке $z = 0$, то из равенства (4.150) следует, что функция $u_0(z)$ дает статический прогиб пролета от равномерно распределенной нагрузки, равной суммарной величине сосредоточенных нагрузок, одновременно находящихся на пролете.

Из сказанного можно заключить, что $u_0(z)$ на промежутке $[0; l_0]$ является решением уравнения

$$EI \frac{d^4 u_0}{dz^4} - T \frac{d^2 u_0}{dz^2} = \frac{Ps}{l_0} \quad (4.151)$$

при условиях

$$u_0(0) = \frac{du_0(0)}{dz} = \frac{u_0(l_0)}{dz} = 0, \quad (4.152)$$

и это решение является суммой ряда (4.148).

Найдем максимальное значение стационарной составляющей прогиба u_0^{\max} . Поскольку

$$u_0^{\max} = u_0\left(\frac{l_0}{2}\right),$$

то

$$u_0^{\max} = \frac{2Ps}{l_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{EI n^4 + T n^2}. \quad (4.153)$$

Поскольку в (4.153) присутствуют только члены с нечетными значениями n и ряд быстро сходится, то для нахождения приближенного значения u_0^{\max} можно ограничиться первым членом ряда. Тогда

$$u_0^{\max} = \frac{Pl_0^2}{\pi^2 l^2 \left[EI \left(\frac{2\pi}{l_0} \right)^2 + T \right]}. \quad (4.154)$$

Точное значение u_0^{\max} можно найти после решения задачи (4.151), (4.152).

Сравним величины u_0^{\max} , определяемые равенствами (4.154) и (4.119), в двух частных случаях: 1) параметр жесткости EI очень мал и натяжение струн T превалирует над жесткостью корпуса СТЛ; 2) усилие T очень мало, т.е. жесткость корпуса превалирует над натяжением струн.

Легко видеть, что в первом случае u_0^{\max} для сплошной СТЛ в $\frac{4}{\pi}$ раз, а во втором в $\frac{16}{\pi}$ раз меньше, чем u_0^{\max} для СТЛ с разрезным корпусом.

4.4. Численное исследование динамического прогиба пролета СТЛ

Основные результаты исследований, проведенных в предыдущем разделе, заключаются в получении формул для определения динамического прогиба пролета СТЛ. Эти формулы, однако, весьма громоздки и провести их анализ без упрощающих предположений затруднительно. Поэтому были проведены на ЭВМ численные расчеты и построены графики, определяющие форму пролета в различные моменты времени и движение отдельных точек пролета при различных условиях нагружения и конструктивных параметрах СТЛ. Для вычислений использовались формулы (4.80) (одиночная нагрузка на СТЛ с разрезным корпусом), (4.71), (4.111) (поток нагрузок на СТЛ с разрезным корпусом) и (4.161) (поток нагрузок на сплошной СТЛ). Благодаря быстрой сходимости рядов, при суммировании в формулах (4.80), (4.111) учитывались первые 20 членов, а в формуле (4.147) — первые 40 членов, что оказалось достаточным для обеспечения необходимой точности вычислений. Во всех расчетах неизменными оставались следующие параметры:

$$P = 10^4 \text{ Н}, E_2 = 10^8 \text{ Н} \cdot \text{м}^2, \mu' = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \mu_2 = 10^{-5} \text{ с},$$

$$\rho_s = 20 \text{ кг/м}, \rho_2 = 21 \text{ кг/м}, T_1 = 10^6 \text{ Н}, T_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

При исследовании потока нагрузок считалось, что расстояние между соседними нагрузками равно длине пролета, т.е. $l' = l_0$. Кроме того, струны сплошной СТЛ считались скрепленными с корпусом, что равносильно допущению о недеформируемости заполнителя. Значения параметров, изменявшихся при проведении расчетов, в каждом конкретном случае указываются.

4.4.1. Зависимость динамического прогиба от длины пролета

На рис. 4.8—4.16 представлена форма пролета СТЛ в последовательные моменты времени

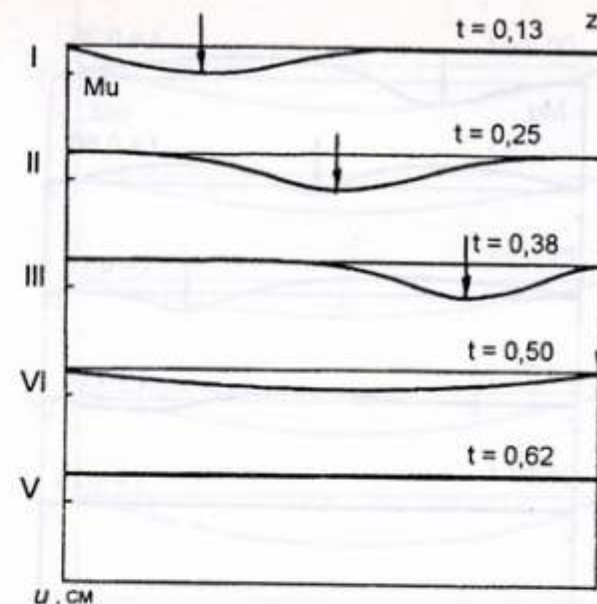


Рис. 4.8

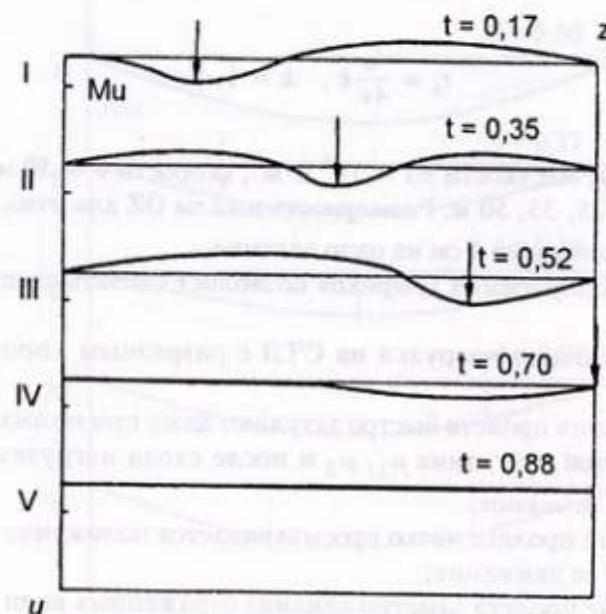


Рис. 4.9

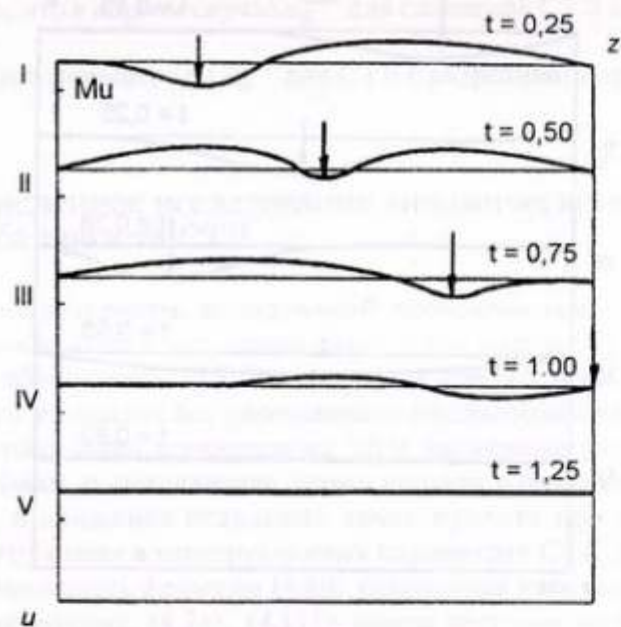


Рис. 4.10

$$t_k = \frac{l_0}{4v} k, \quad k = \overline{1, 5}$$

при параметре жесткости $EI = 10^6 \text{ н} \cdot \text{м}^2$, скорости $v = 50 \text{ м/с}$ и длине пролета $l_0 = 25, 35, 50 \text{ м}$. Размерность шкалы OZ для этих и последующих рисунков равна 1 см на одно деление.

Анализ полученных графиков позволяет сделать следующие выводы.

а). Одиночная нагрузка на СТЛ с разрезным корпусом (рис. 4.8—4.10):

- колебания пролета быстро затухают даже при малых значениях коэффициентов затухания μ_1, μ_2 и после схода нагрузки с пролета практически исчезают;

- в форме пролета четко просматривается положение нагрузки и направление ее движения;

- в форме пролета заметно влияние отраженных волн прогиба;

- максимальный динамический прогиб для взятых исходных данных не превосходит 1,5 см.

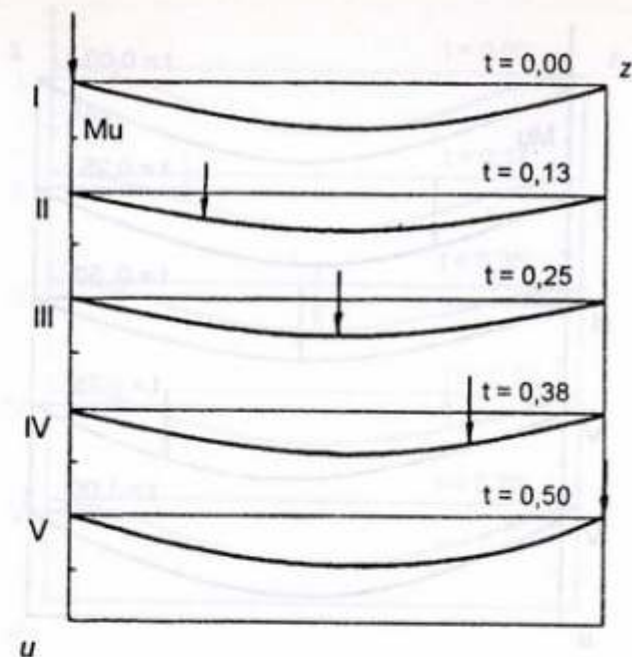


Рис. 4.11

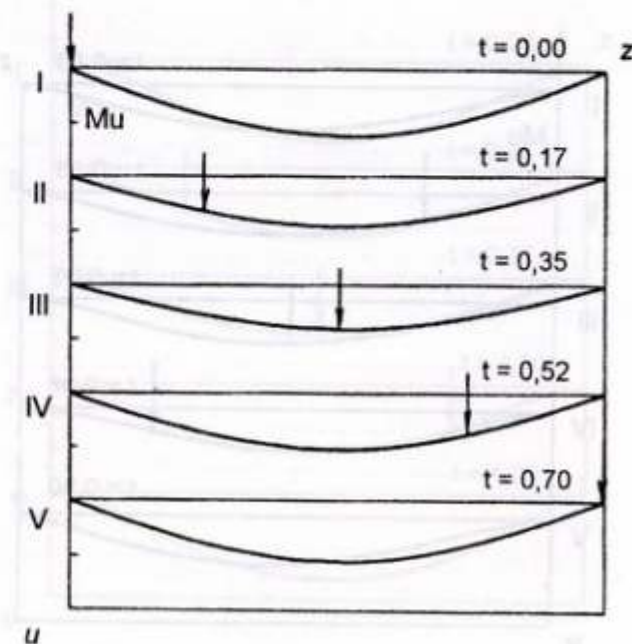


Рис. 4.12

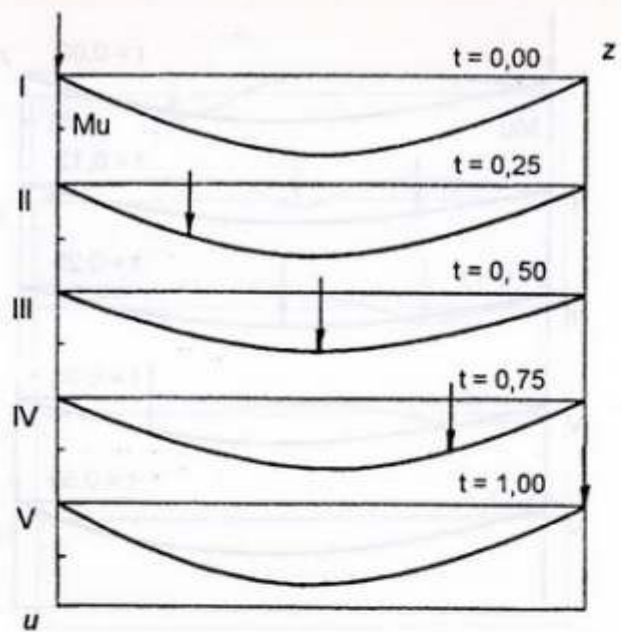


Рис. 4. 13

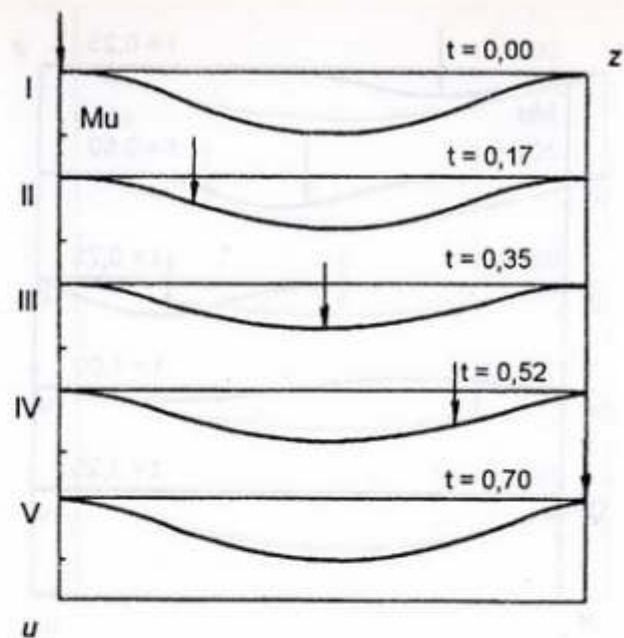


Рис. 4. 15

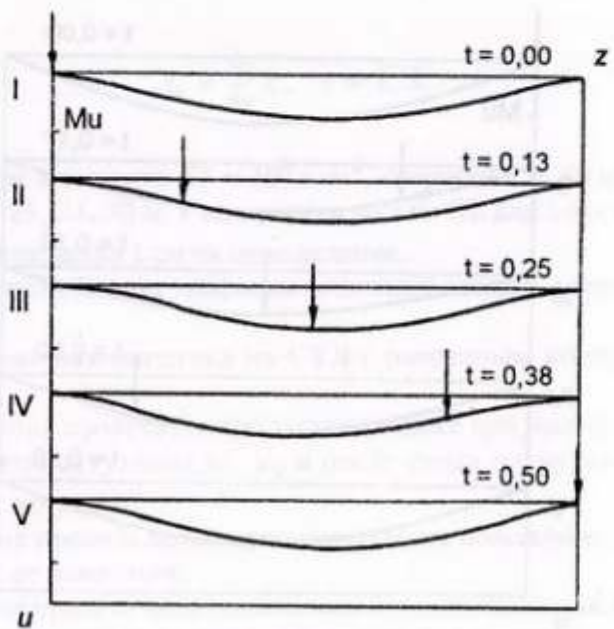


Рис. 4. 14

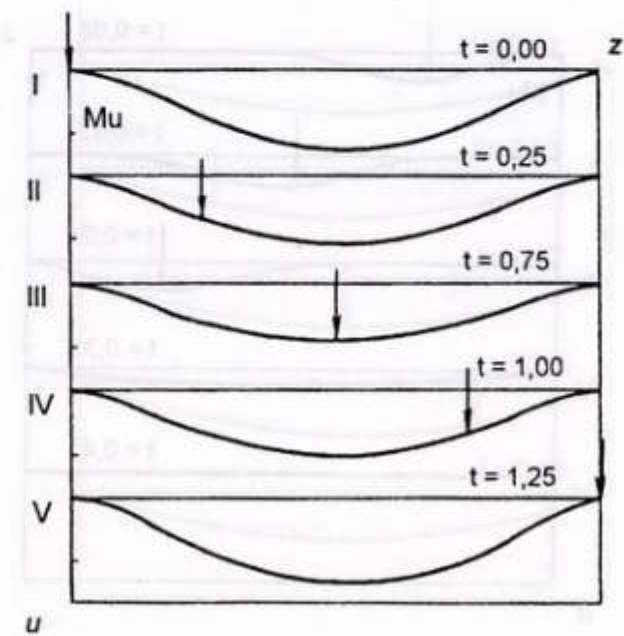


Рис. 4. 16

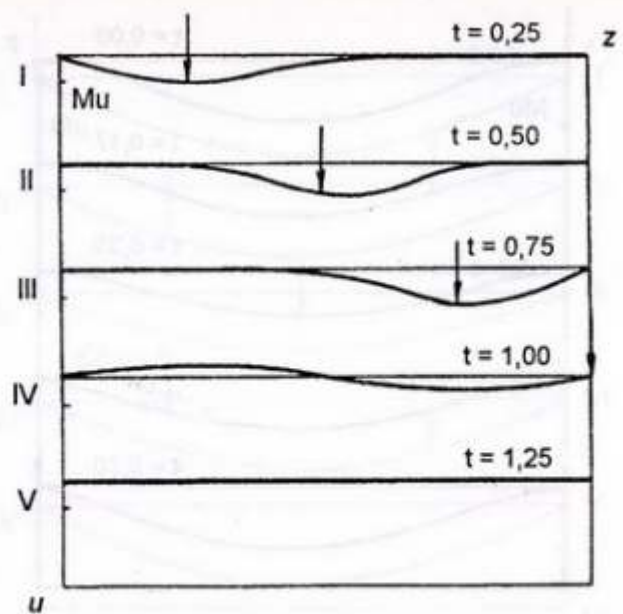


Рис. 4.17

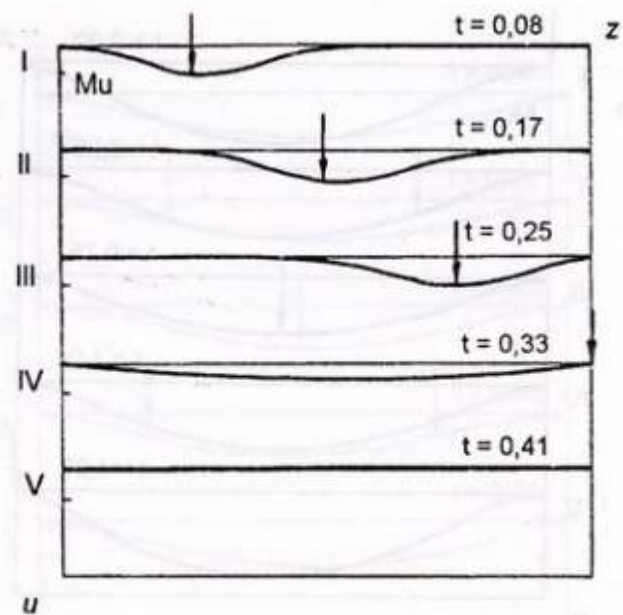


Рис. 4.18

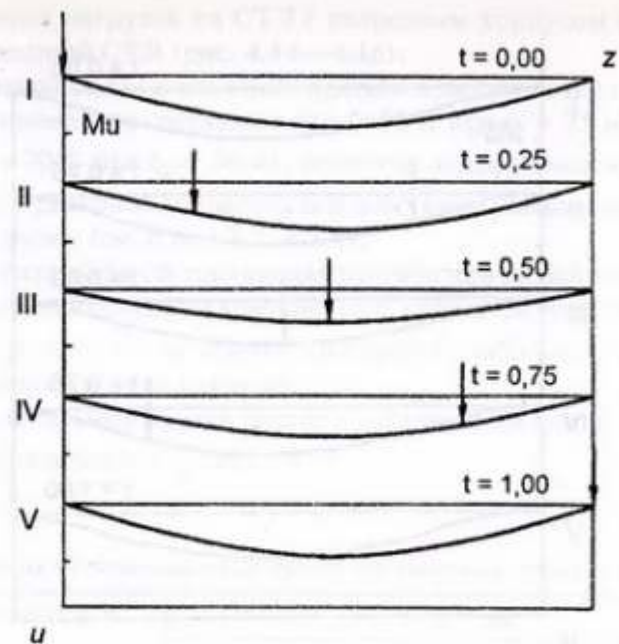


Рис. 4.19

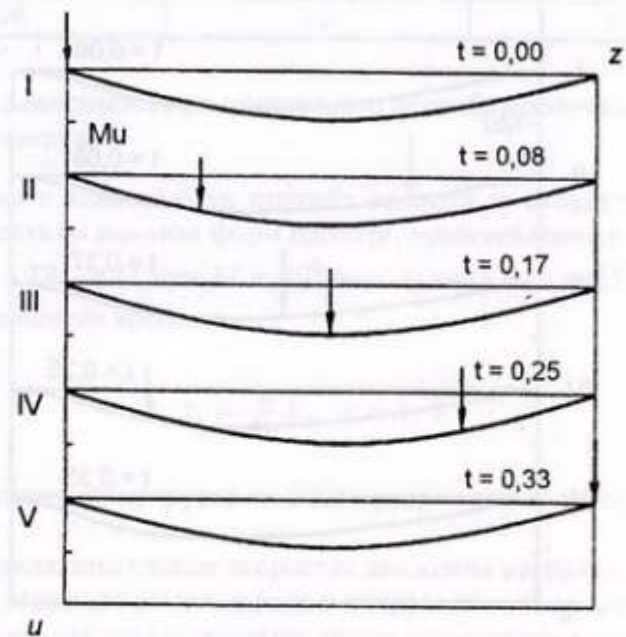


Рис. 4.20

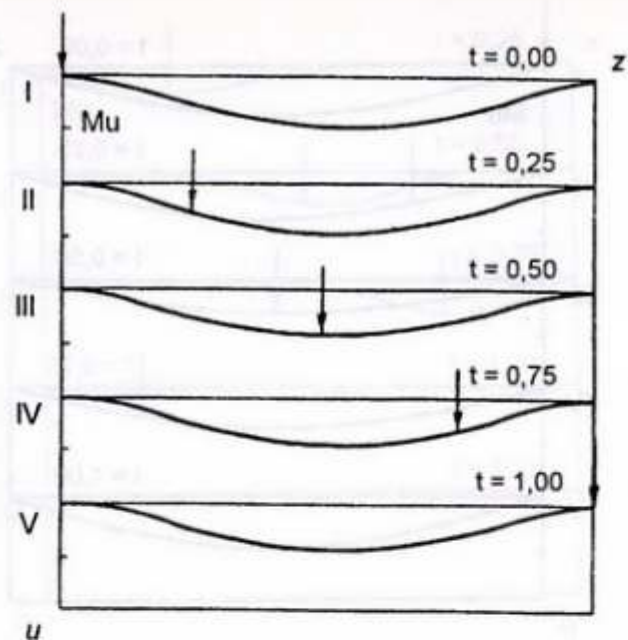


Рис. 4.21

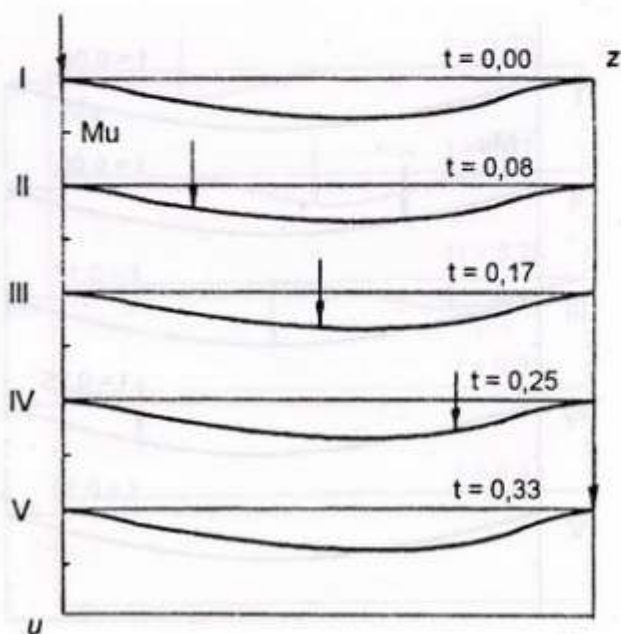


Рис. 4.22

б). Поток нагрузок на СТЛ с разрезным корпусом (рис. 4.11—4.13) и сплошной СТЛ (рис. 4.14—4.16):

- основной вклад в значение прогиба в любой точке пролета вносит его стационарная составляющая ($\approx 90\%$ при $l_0 = 25$ м, $\approx 80\%$ при $l_0 = 35$ м, $\approx 70\%$ при $l_0 = 50$ м), величину которой можно найти, решая задачу о равновесии пролета под действием равномерно распределенной нагрузки (см. п.п. 4.3.2, 4.3.4);

- колебательная составляющая прогиба при любой длине пролета l_0 представлена в основном компонентой, симметричной относительно середины пролета, т.е. динамический прогиб слабо зависит от направления движения потока нагрузок;

- максимальный прогиб растет с увеличением длины пролета l_0 и мало в сопоставлении с l_0 (табл. 4.1).

Таблица 4.1. Максимальный прогиб при движении потока нагрузок

Длина пролета l_0 , м	u_0^{\max} , см	
	разрезной корпус	сплошной корпус
25	0,8	0,7
35	1,0	0,8
50	1,3	1,1

4.4.2. Зависимость динамического прогиба пролета от скорости движения нагрузок

Выводы о зависимости прогиба пролета от скорости нагрузок можно сделать из анализа форм пролета, представленных на рис. 4.8, 4.11, 4.14, 4.17—4.22 при $EI = 10^6$ н·м, $l_0 = 25$ м, $v = 25, 50, 75$ м/с для пяти моментов времени

$$t_k = \frac{l_0}{4v} k, \quad k = \overline{1, 5}.$$

а). Одиночная нагрузка на СТЛ с разрезным корпусом (рис. 4.8, 4.17, 4.18):

- при указанных выше скоростях движения нагрузки форма пролета четко отражает ее положение и направление движения;
- в форме пролета просматриваются отраженные волны прогиба;
- максимальный динамический прогиб не превосходит 2 мм, что значительно меньше стационарной компоненты (табл. 4.1);

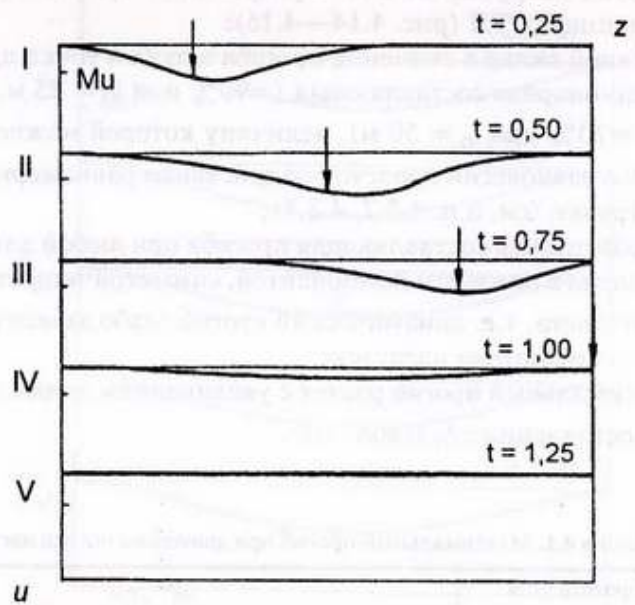


Рис. 4.23

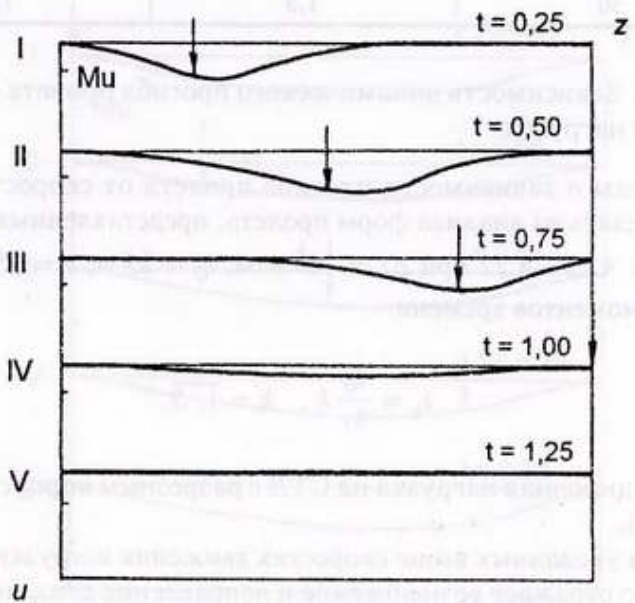


Рис. 4.24

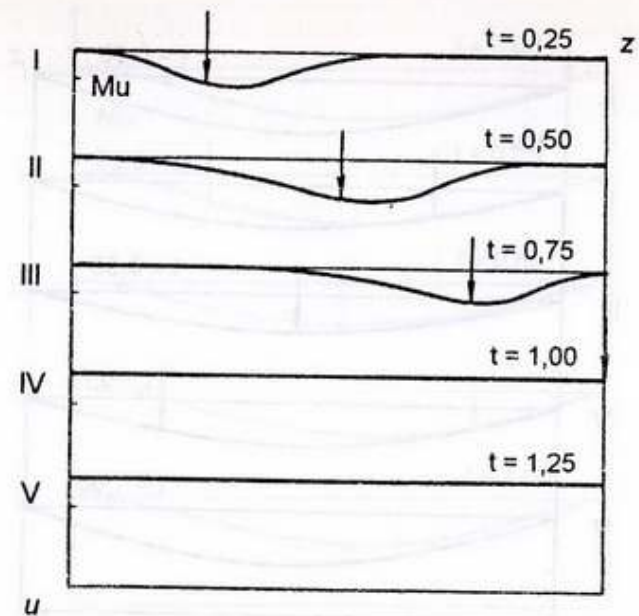


Рис. 4.25

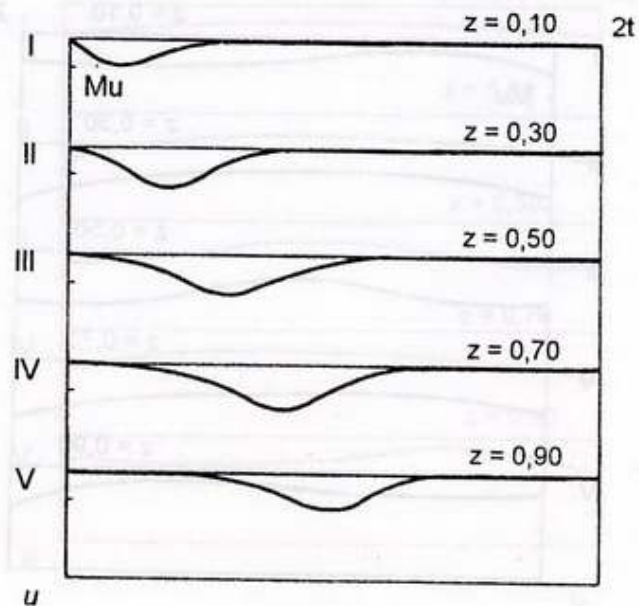


Рис. 4.26—4.27

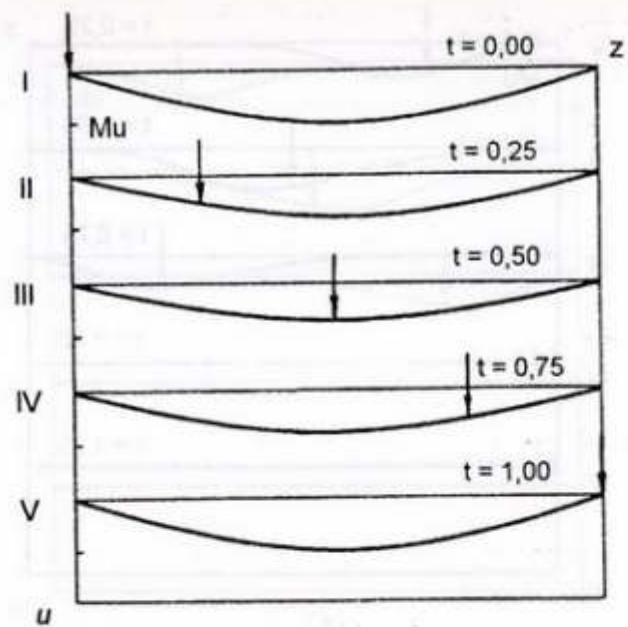


Рис. 4.28—4.30

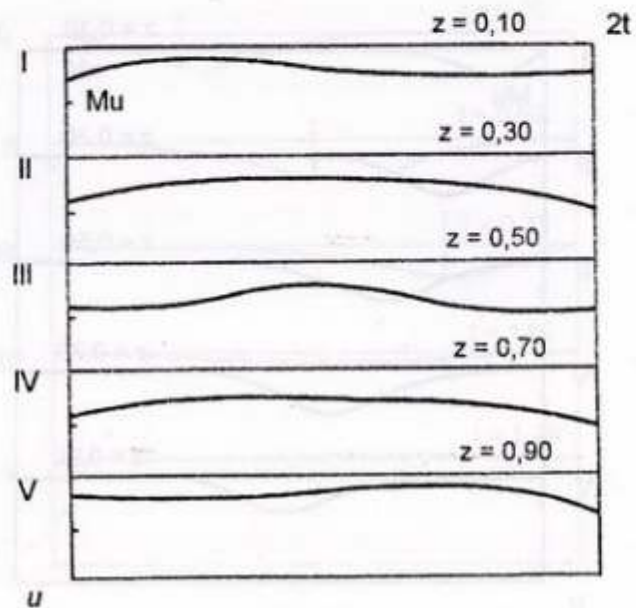


Рис. 4.31—4.32

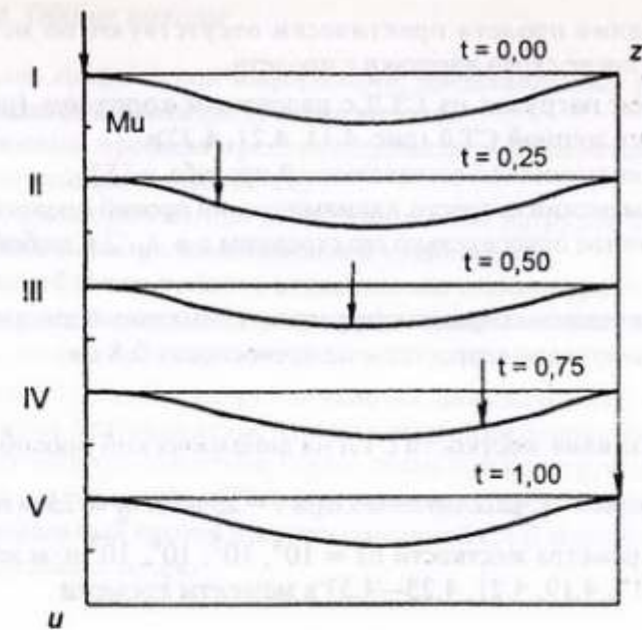


Рис. 4.33—4.35

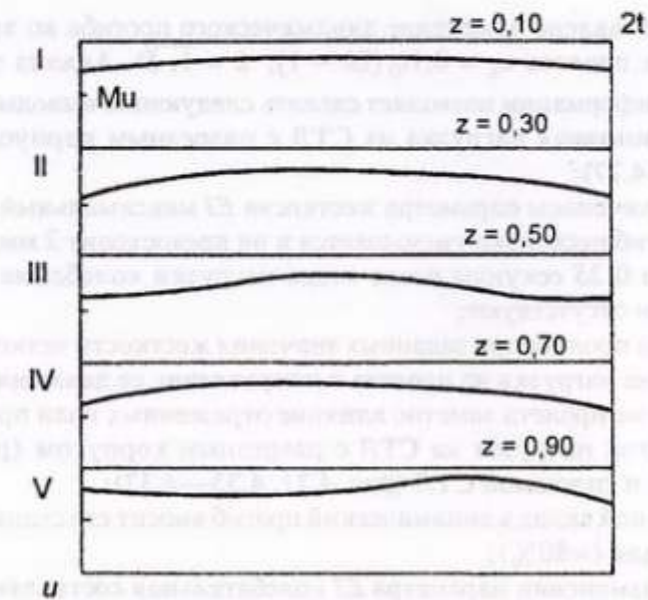


Рис. 4.36—4.37

- колебания пролета практически отсутствуют по истечении $l_0/4v$ секунд после схода нагрузки с пролета.

б). Поток нагрузок на СТЛ с разрезным корпусом (рис. 4.11, 4.19, 4.20) и сплошной СТЛ (рис. 4.11, 4.21, 4.22):

- доля динамической составляющей прогиба $\approx 15\%$;
- при изменении скорости v динамический прогиб пролета остается симметричным относительно его середины $z = l_0/2$ в любой момент времени;
- с увеличением скорости нагрузок максимальный динамический прогиб незначительно возрастет и не превосходит 0,8 см.

4.4.3. Влияние жесткости СТЛ на динамический прогиб пролета

Форма пролета, рассчитанная при $v = 25$ м/с, $l_0 = 25$ м при варьировании параметра жесткости $EI = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ н·м изображена на рис. 4.17, 4.19, 4.21, 4.23—4.37 в моменты времени

$$t_k = \frac{l_0}{4v} k, \quad k = \overline{1, 5}$$

(Здесь представлено изменение динамического прогиба во времени в пяти точках пролета $x_k = 0,1l_0(2k - 1)$, $k = \overline{1, 5}$). Анализ этой графической информации позволяет сделать следующие выводы:

а). Одиночная нагрузка на СТЛ с разрезным корпусом (рис. 4.17, 4.23—4.27):

- с увеличением параметра жесткости EI максимальный динамический прогиб несколько уменьшается и не превосходит 2 мм;
- через 0,25 секунды после схода нагрузки колебания пролета практически отсутствуют;
- форма пролета при заданных значения жесткости четко отражает положение нагрузки на пролете и направление ее движения;
- в форме пролета заметно влияние отраженных волн прогиба.

б). Поток нагрузок на СТЛ с разрезным корпусом (рис. 4.19, 4.28—4.32) и сплошной СТЛ (рис. 4.21, 4.33—4.37):

- основной вклад в динамический прогиб вносит его стационарная составляющая ($\approx 80\%$);
- при изменении параметра EI колебательная составляющая динамического прогиба остается симметричной относительно середины пролета $z = l_0/2$;
- максимальный динамический прогиб пролета не превосходит 0,7 см и незначительно уменьшается с ростом EI .

4.4.4. Общие выводы

Анализ графической информации, представленной на рис. 4.8—4.37, позволяет сделать следующие выводы:

- кривизна профиля пролета в процессе движения одиночной нагрузки значительно изменяется;
- профиль пролета при движении потока нагрузок представляет собой линию с плавно изменяющейся кривизной;
- в колебаниях пролета относительно стационарной формы при движении потока нагрузок присутствует одна заметная стоячая волна длины l_0 и малой амплитуды по сравнению со стационарным прогибом;
- в случае потока нагрузок условия динамического нагружения пролета более благоприятны, чем при движении одиночной нагрузки;
- струнная транспортная линия сплошной конструкции предпочтительнее по сравнению с СТЛ с разрезным над опорами корпусом, так как максимальный прогиб пролета сплошной СТЛ меньше и ее форма не имеет угловых точек.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

СТС	— струнная транспортная система;
СТЛ	— струнная транспортная линия;
ТМ	— транспортный модуль;
$2m_1$	— масса платформы ТМ;
m_2	— масса колеса ТМ;
c, v	— коэффициенты, характеризующие жесткость пружины и усилие демпфера в амортизаторе ТМ;
t	— время;
z	— координата точки пролета СТЛ;
$u(z, t), u_2(z, t)$	— вертикальное отклонение от положения равновесия точек рабочей поверхности пролета СТЛ и нижней струны соответственно;
$u_c^{1\max}, u_c^{2\max}$	— максимальный статический прогиб пролета СТЛ при действии на него одной и двух сосредоточенных нагрузок, соответственно;
$u_d^{1\max}, u_d^{2\max}$	— максимальный динамический прогиб пролета СТЛ под действием одной и двух движущихся нагрузок, соответственно;
i'	— расстояние между нагрузками в потоке;
l_0	— длина пролетов СТЛ;
l_1	— расстояние между осями передних и задних колес ТМ;
l_2	— расстояние между ТМ в потоке;
g	— ускорение свободного падения;
N_0	— количество пролетов СТЛ;
T_1, T_2	— натяжение верхней и нижней струн, соответственно;
μ', E	— коэффициент затухания и модуль упругости корпуса СТЛ;
μ_2, E_2	— коэффициент затухания и модуль упругости заполнителя;
ρ_3	— суммарная масса единицы длины корпуса, верхней струны и заполнителя СТЛ;
ρ_2	— масса единицы длины нижней струны;
$\delta(z)$	— функция Дирака;
$U(t)$	— отклонение центра масс платформы ТМ от равновесного положения;

$\varphi(t)$	— угол наклона к горизонтали продольной оси платформы ТМ;
I	— момент инерции сечения корпуса СТЛ;
I_c	— момент инерции платформы ТМ относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к направлению движения;
J	— момент инерции участка;
C_x	— коэффициент аэродинамического сопротивления натурального объекта;
β	— угол натекания воздушного потока;
$C_{x0}^{\text{мод}}$	— коэффициент аэродинамического сопротивления масштабной модели при нулевом угле натекания воздушного потока ($\beta = 0$);
K_β	— коэффициент учета угла натекания воздушного потока;
λ	— корреляционный коэффициент от модели к натуре;
v	— фазовая скорость бегущей волны;
N	— нормальное усилие;
T_τ	— тангенциальное усилие;
τ	— тангенциальное напряжение;
$p(x, t)$	— контактное давление;
\dot{u}	— скорость проскальзывания;
$i(x, t)$	— интенсивность линейного изнашивания;
K_I	— коэффициент пропорциональности;
γ	— степенной показатель;
h	— длина участка поверхности;
j	— номер участка поверхности;
n	— число этапов нагружения;
r	— номер этапа нагружения;
u	— смещение поверхности;
m	— число элементов дискретизации зоны контакта;
I_V	— объемный износ;
$[I_V]$	— максимально допустимый износ;
q	— число циклов изнашивания;
S_c	— зона контакта;
S_s	— зона проскальзывания;
A_f	— работа сил трения при проскальзывании;
f	— коэффициент трения;
f_0	— коэффициент трения покоя;
f_s	— коэффициент трения скольжения.

1. Балакин В.А., Переверзева О.В. Проблемы трения и износа на ракетных треках. Трение и износ, 1991, 12, № 5. с. 896—903.
2. Бахвалов Ю.А., Бочаров В.И., Винокуров В.А. и др. Транспорт с магнитным подвесом. /Под ред. В.И. Бочарова, В.Д. Нагорского. —М.: Машиностроение, 1991.
3. Бельмас И.В. Напряженное состояние резинотросовых лент при произвольном повреждении тросов. Пробл. машиностр. и надежн. машин, 1993, № 6. с. 45—48.
4. Браун Э.Д., Евдокимов Ю.А., Чичинадзе А.В. Моделирование трения и изнашивания в машинах. М.: Машиностроение, 1982.
5. Виравов Р.В. Тяговые свойства фрикционных передач. М.: Машиностроение, 1982.
6. Высоцкий М.С., Евграфов А.Н., Гостев К.А. Определение коэффициента аэродинамического сопротивления C_x автопоезда по результатам модельных исследований. Весці Акад. Нав. Бел. Сер. фіз.-тэхн. навук, 1995, № 2. с. 46—47.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. —М.: Мир, 1989.
8. Евтушенко А.А., Коваленко Е.В. Влияние термосопротивления на основные характеристики контакта в условиях плоской задачи. Мех. тв. тела, 1995, № 4. с. 56—62.
9. Елтышев В.А. Напряженно-деформированное состояние оболочечных конструкций с наполнителем. —М.: Наука, 1981.
10. Забегаев А.В. Расчет железобетонных колонн на действие аварийных ударов. Сб. научн. тр. МИИЖТ, 1992, № 870. с. 37—45.
11. Зелькин Г.Г. Летящие экспрессы. —Минск: Вышэйшая школа, 1984.
12. Исследование динамики и прочности пассажирских вагонов/ Под ред. С.И. Соколова. —М.: Машиностроение, 1976.
13. Камаев В.А. Оптимизация параметров ходовых частей железнодорожного подвижного состава. —М.: Машиностроение, 1980.
14. Кончиц В.В., Мешков В.В., Мышкин Н.К. Триботехника электрических контактов. —Минск: Наука и техника. 1986.
15. Композиционные материалы / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. —М.: Машиностроение, 1978, Т. 3. Применение композиционных материалов в технике / Под ред. Б. Нотона.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. —М.: Наука, 1970.
17. Крауфорд Ф. Волны. —М.: Наука, 1976.
18. Лашеников Б.Я., Дмитриев Я.Б., Смирнов М.Н. Методы расчета на ЭВМ конструкций и сооружений. —М.: Стройиздат, 1993.
19. Лямин В.И. Динамика ракетных тележек. —М. 1962.
20. Майборода В.П., Кравчук А.С., Холин Н.Н. Скоростное деформирование конструкционных материалов. —М.: Машиностроение, 1986.
21. Матвеев В.В., Бовсуновский А.П. Прямая экспериментальная оценка влияния статического растяжения на демпфирующие свойства материалов при изгибных колебаниях. Пробл. прочн., 1995, № 4. с. 83—93.
22. Мацудайра Т. Предел повышения скоростей движения поездов. Ежем. бюлл. межд. асоц. железнод. конгр., 1967, № 12. с. 19—24.
23. Мур Д. Основы и применения триботоники. —М.: Мир, 1978.
24. Пинегин С.В. Трение качения в машинах и приборах, —М.: Машиностроение, 1976.
25. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. —М.: Наука, 1987.
26. Поляков В.Ю., Жуков К.А. Моделирование колебаний в системе "экипаж-путь-мост". Сб. науч. тр. МИИЖТ, 1992, № 870. с. 57—64.
27. Попов Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. —М.: Изд-во МГТУ, 1993.
28. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. —М.: Наука, 1981.
29. Салтанов Н.В. Гибкие нити в потоках. Киев: Наук. думка, 1974.
30. Самме Г.В. Зависимость силы трения от скорости скольжения колесной пары локомотива. Трение и износ, 1995, 16, № 1. с. 55—60.
31. Смирнов В.И. Курс высшей математики. —М.: Физматгиз, 1962.
32. Смирнов В.Ф., Зябликов В.М. Особенности поведения динамических систем при волновом распространении энергии колебаний. Вестник машиностроения, 1994, № 10. с. 7—11.
33. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955.
34. Тихонов В.С., Сафронов В.И. К расчету напряженно-деформированного состояния глубоководной буровой колонны на течении. Пробл. прочн., 1995, № 8. с. 60—67.
35. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970.
36. Фурунжиев Р.И. Проектирование оптимальных виброзащитных систем. —Минск: Вышэйшая школа, 1971.
37. Шилько С.В. Выбор коэффициента проскальзывания при оптимизации тяги локомотива. / Тез. докл. межд. н/п конф. Ресурсо- и энергосб. технологии на трансп. и строит. комплексе. —Гомель, 1995. с. 81—82.

38. Шульц В.В. Форма естественного износа деталей машин. —Л.: Машиностроение, 1990.
39. Юницкий А.Э. Линейная транспортная система. Международная заявка на изобретение PCT/IB94/00065 от 26.09.94 г. Заявитель "NTL Neue Transportlinien GmbH", Германия.
40. Юницкий А.Э. Патент Российской Федерации по заявке № 94026782/11 (026280) от 26.09.94 г. МПК В61В 5/02, В61В 13/00, Е01В 25/22. Патентообладатель "NTL Neue Transportlinien GmbH", Германия.
41. Юницкий А.Э. и др. Анализ колебаний пролетных строений струнной транспортной системы / Тез. Бел. конгр. по теор. и прикл. мех. "Механика-95", Минск, 1995. с. 253—254.
42. Юницкий А.Э. и др. К динамике струнной транспортной системы / Тез. Бел. конгр. по теор. и прикл. мех. "Механика-95", Минск, 1995. с. 254—255.
43. Юницкий А.Э. Высокоскоростной наземный транспорт НТЛ. Тез. докл. межд. н/п конф. Ресурсо- и энергосб. технологии на трансп. и строит. комплексе, Гомель, 1995. с. 69—70.
44. Bolton A. Wind excitation of steel chimneys. *Struct. Eng.*, 1994, 72, No. 5. p. 75—80.
45. Cai Chuh Sheng. Rehabilitation of Deer Isle bridge: aerodynamic behaviour // 10 Annu. Int. Bridge Conf., Pittsburgh, Pa, 1993. p. 9—16.
46. Kalker J.J. A strip theory for rolling with slip and spin / *Proc. Kon. Ned. Acad. van Wetenschappen*, 1967, B70. p. 10.
47. Forward R.L. The cable catapult: putting it there and keeping it there. *AIAA Pap.* 1992, No. 3077. p. 1—11.
48. Shil'ko S.V., Sherbakov S.V. Boundary element method in modelling failure of compressed metal-polymeric adhesive joints // *Proc. of Europ. Mech. Colloquim "Euromech 227"*. France, Saint-Etienn., 1987. p. 339—351.
49. Vladic J., Sovily B. Tribološke karakteristike prenosa snade putem trenja kod specifičnih transportnih masina. *Tribol. u ind.*, 1994, 16, № 3. p. 85—93.
50. Yip F.C., Venart I.E.S. Surface topography effects in the estimation of thermal and electrical contact resistance. Properties and metrology of surfaces / *Proc. Inst. Mech. Eng.* 182, 1967—1968. p. 81—93.