$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \tag{4.47}$$

$$u(z',0) = \frac{\partial u(z',0)}{\partial t} = 0. \tag{4.48}$$

Для решения полученной задачи применим к уравнению (4.46) интегральное синус-преобразование Фурье в конечных пределах [33]. В результате придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\pi^2}{l_0^2} n^2 \tilde{u} = \frac{\pi P}{\rho' l_0} \sin \frac{\pi v n}{l_0} t \sigma\left(0, \frac{l_0}{v}\right) \tag{4.49}$$

с условиями

$$\tilde{u}(n,0) = \frac{d\tilde{u}(n,0)}{dt} = 0 \tag{4.50}$$

для трансформанты

$$\tilde{u}(n,t) = \int_0^\pi u(z',t)\sin(nz')dz'.$$

Решив уравнение (4.49) при условиях (4.50), получим:

$$\tilde{u}(n,t) = \frac{\pi A}{2n^2} \begin{cases} v \sin \frac{a\pi n}{l_0} t - a \sin \frac{v\pi n}{l_0} t, & 0 \le t \le \frac{l_0}{v}; \\ v\left[\sin \frac{a\pi n}{l_0} t + \sin \pi n(1 + \frac{a}{v} - \frac{at}{l_0}\right], & t > \frac{l_0}{v}. \end{cases} \tag{4.51}$$

Здесь

$$A = \frac{2Pl}{\rho' a \pi^2 \left(v^2 - a^2\right)}.$$

Решение исходной задачи представляется в виде ряда

$$u(z',t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}(n,t) \sin nz'. \tag{4.52}$$

Вернувшись в равенстве (4.52) к прежней переменной z, получим:

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l_0} z \begin{cases} v \sin \frac{a\pi n}{l_0} t - a \sin \frac{v\pi n}{l_0} t, & 0 \le t \le \frac{l_0}{v}; \\ v\left[\sin \frac{a\pi n}{l_0} t + \sin \pi n\left(1 + \frac{a}{v} - \frac{at}{l_0}\right)\right], & t > \frac{l_0}{v}. \end{cases} \tag{4.53}$$

Выражение (4.53) позволяет вычислить динамический прогиб пролета в общем случае, т. е. для любых скоростей $v \neq a$ и момента времени t. Вычисляя предел функции $u(z, t)$ при $v \to a$, получим:

$$u(z,t) = \frac{g l_0 \left(m_1 + 2m_2\right)}{2\rho' \pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l_0} z \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{1}{n^2}\left(\sin \frac{a\pi n}{l_0} t - \frac{a\pi n t}{l_0} \cos \frac{a\pi n}{l_0} t, \quad 0 \le t \le \frac{l_0}{a}\right); \\ -\frac{\pi}{n} \cos \frac{a\pi n}{l_0} t, \quad t > \frac{l_0}{a}. \end{cases}$$

Благодаря хорошей сходимости использованного тригонометрического ряда функция (4.53) удобна для численного анализа. Качественный анализ этой функции возможен только после ее упрощения путем суммирования входящих в равенство (4.53) рядов. Воспользуемся для этой цели известным рядом [6]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nz \sin ny = \begin{cases} z\frac{\pi - y}{2}, & -y \le z \le y; \\ y\frac{\pi - z}{2}, & y \le x \le 2\pi - y, \quad 0 < y < \pi. \end{cases} \tag{4.54}$$

При использовании разложения (4.54) для суммирования рядов в выражении (4.53) возникают качественно различные ситуации в зависимости от соотношения скорости движения нагрузки v и скорости распространения возмущений вдоль струны $a = (T/\rho)^{1/2}$. Рассмотрим поэтому некоторые частные случаи.