4.2.3. Динамический прогиб пролета при движении потока нагрузок

Предположим, что в момент времени $t = 0$ на покоящийся пролет вступает первая из потока i_0 нагрузок величины P, движущихся с постоянной скоростью v на расстоянии l' одна от другой. С практической точки зрения весьма важно знать величину динамического прогиба пролета после прохождения i_0-й нагрузки в зависимости от значений постоянных l', v и i_0. В частности, для организации непрерывного движения нагрузок необходимо найти такие значения l' и v, т. е. такие режимы движения, при которых максимальный динамический прогиб пролета остается ограниченным для большого числа нагрузок ($i_0 \to \infty$). Не менее важно также найти резонансные режимы движения, т. е. те значения параметров l' и v, при которых максимальный динамический прогиб неограниченно возрастает с увеличением числа прошедших по пролету нагрузок.

Для рассмотрения поставленных задач воспользуемся результатами, полученными в пунктах 4.1.4 и 4.2.2, из которых следует, что динамический прогиб пролета u_d дается равенством:

$$u_d(z,t) = \sum_{i=1}^{i_0} u\left(z, t-(i-1)\frac{l'}{v}\right)\sigma\left((i-1)\frac{l'}{v}, \infty\right), \tag{4.58}$$

где функция $u(z, t)$ определена формулой (4.53). Из равенства (4.53) следует, что функция $u(z, t)$ при $t > i_0/v$ периодична по t с периодом $t_0 = 2l_0/a$. Тогда функция $u(z, t - (i-1)l'/v)$ имеет тот же период при $t > l_0/v + (i-1)l'/v$, а $u_d(z, t)$ – при $t > l_0/v + (i_0-1)l'/v$. Следовательно, для небольших чисел i_0 прогиб u_d в фиксированный момент времени в интервале

$$l_0/v + (i_0-1)l'/v < t^* < l_0/v + (i-1)l'/v + t_0$$

можно определить геометрическим путем. Для этого, очевидно, нужно сделать следующее:

1) построить график функции $u(z, t^* - (i_0-1)l'/v)$ на интервале $0 \le z \le l_0$;

2) продлить периодически этот график на значения $z > l_0$;

3) сложить i_0 графиков функций $u(z, t^* - (i_0-1)l'/v)$ на интервале $0 \le z \le l_0$, смещая каждый последующий относительно предыдущего на l' в отрицательном направлении оси $0Z$.

Некоторые выводы из равенства (4.53) при определенных значениях l' и v можно получить и без геометрических построений.

1. Случай $v = \dfrac{a}{2k+1}$; $k = 1, 2, 3, \ldots$, l' – любое.

Из равенства (4.53) имеем:

$$u(z,t) = Av\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\sin\frac{n\pi a}{l_0}t + \sin n\pi\left(1+\frac{a}{l_0}\right)\right]\sin\frac{n\pi z}{l_0} =$$

$$= Av\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\sin\frac{n\pi a}{l_0}t + \sin n\pi\left(2(k+1) - \frac{at}{l_0}\right)\right]\sin\frac{n\pi z}{l_0} = 0, \tag{4.59}$$

$$t > \frac{l_0}{v}; \quad 0 \le z \le l_0.$$

Это тождество означает, что возмущение, созданное движущейся по пролету одиночной нагрузкой, после ее схода с пролета полностью исчезает. Из него следует также, что при движении потока сошедшие с пролета нагрузки не вносят вклада в деформацию последнего, и прогиб пролета определяется лишь движущимися по нему нагрузками. Следовательно, максимальный прогиб пролета ограничен и может быть найден, если задать расстояния между нагрузками.

Анализ характера деформации пролета позволяет сделать вывод, что при $l' \ge 2kl_0/(2k+1)$ каждая нагрузка вступает на невозмущенный участок пролета, т. е. все нагрузки находятся в одинаковых условиях движения. Таким образом, в рассматриваемом режиме движения колебания пролета исчезают в силу взаимного погашения волн деформации. Кроме этого, положительной чертой данного режима движения является необходимость точно выдерживать лишь скорость движения, не заботясь об интервалах между нагрузками, которые могут быть любыми.

2. Случай $v = \dfrac{a}{2k}$; $l = \dfrac{j-0{,}5}{k}$; $k, j = 1, 2, 3, \ldots$.

Равенство (4.53) в этом случае примет вид:

$$u(z,t) = 2Av\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{l_0}t\sin\frac{n\pi z}{l_0}, \quad t > \frac{l_0}{v}.$$