Тогда, возвращаясь к (4.71), получим расчетное выражение для перемещения $u(z, t)$:

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi z}{l_0}. \tag{4.80}$$

При необходимости аналогичным образом может быть получена функция $u_2(z, t)$.

Найдем теперь корни λ_k, $k = 1, 2$ уравнения (4.78), учитывая, что для реальных материалов μ', $\mu_2 \ll 1$. Так, например, для стали μ' имеет порядок 10^{-4}, для каучука порядок $\mu_2 - 10^{-3}$. На этом основании корни λ_k как функции от μ', μ_2 можно искать в виде разложения в ряд по степеням μ', μ_2:

$$\lambda_k(\mu, \mu_2) = \lambda_k(0,0) + \frac{\partial\lambda_k(0,0)}{\partial\mu}\mu' + \frac{\partial\lambda_k(0,0)}{\partial\mu}\mu_2 + \ldots, \tag{4.81}$$

причем $\lambda_k\,(0, 0)$ является корнем уравнения

$$\lambda^4 + a_{20}\lambda^2 + a_0 = 0, \tag{4.82}$$

откуда

$$\lambda_k^2(0,0) = 0{,}5\left(-a_{20} + (-1)^k D^{1/2}\right); \tag{4.83}$$

$$D = \left[n_1^4 E_{11} + n_1^2(T_{11} - T_{22}) + E_{21} - E_{22}\right]^2 + 4E_{21}E_{22} = D_1^2 + 4E_{21}E_{22};$$

$$D_1 = n_1^4 E_{11} + n_1^2(T_{11} - T_{22}) + E_{21} - E_{22}.$$

Поскольку при любых значениях постоянной D параметры a_{20} и a_0 положительны, то

$$\lambda_k^2(0,0) < 0, \quad k = 1, 2,$$

то

$$\lambda_k^2(0,0) < \frac{i}{\sqrt{2}}\left[a_{20} - (-1)^k D^{1/2}\right]^{1/2}. \tag{4.84}$$

Дифференцируя уравнение (4.78) последовательно по μ' и μ_2, найдем:

$$\frac{\partial\lambda_k(0,0)}{\partial\mu'} = \frac{1}{4}n_1^4 E_{11}\left[-1 + \frac{(-1)^k D_1}{D^{1/2}}\right]; \tag{4.85}$$

$$\frac{\partial\lambda_k(0,0)}{\partial\mu_2} = -\frac{1}{4}(E_{21} + E_{22}) - \frac{D_1(E_{22} - E_{21}) - 4E_{21}E_{22}}{4(-1)^k D^{1/2}}. \tag{4.86}$$

Если ограничиться тремя членами ряда, то, подставив (4.84)–(4.86) в разложение (4.81), получим приближенные значения корней λ_k. Ясно, что

$$\beta_k = \left[0{,}5\left(a_{20} - (-1)^k D^{1/2}\right)\right]^{1/2};$$

$$\alpha_k = \frac{\partial\lambda_k(0,0)}{\partial\mu}\mu' + \frac{\partial\lambda_k(0,0)}{\partial\mu_2}\mu_2, \quad k = 1, 2. \tag{4.87}$$

Представляет интерес оценка промежутка времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается до некоторого заданного значения. Коэффициенты α_k зависят от n и характеризуют скорость затухания стоячей волны, длина которой равна l_0/n. Действительно, i-кратное уменьшение амплитуды такой волны произойдет через промежуток времени

$$t_i(n) = \max_{k=1,2}\frac{\ln l/i}{\alpha_k(n)} = \frac{\ln i}{\min\limits_{k=1,2}(-\alpha_k(n))}. \tag{4.88}$$

Найдем сначала t_1 для волн большой длины, т. е. будем считать, что $n = 1, 2, \ldots, n_2$ и, кроме того, справедливо соотношение

$$\left|\eta(n)(\eta(n) + 2E_0)\right| < 1, \tag{4.89}$$

где

$$\eta(n) = \frac{n_1^4 E_{11} + n_1^2(T_{11} - T_{22})}{E_{21} + E_{22}}; \quad E_0 = \frac{E_{21} - E_{22}}{E_{21} + E_{22}}.$$