3. Сила $\bar{Q}$ сопротивления атмосферы, с которой контактирует оболочка, участвующая в радиальном движении. С учетом убывания плотности атмосферы

$$Q = k_ф \rho_0 \dot{r}_р^2 \exp\left[-\alpha_п \left(\frac{r}{R} - 1\right)\right],$$

где $k_ф$ – коэффициент, зависящий от формы оболочки; $\rho_{а0}$ – начальная плотность атмосферы; $\alpha_п$ – величина, при которой влиянием Q на высоте $H_а \geq 100$ км можно пренебречь.

Используя формализм Лагранжа и опуская индекс «р» при обозначении текущего радиуса ротора, запишем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial K}{\partial r} = -G - F - Q.$$

Выполнив дифференцирование, получим после некоторых преобразований и упрощений дифференциальные уравнения движения элемента ротора и оболочки на начальном этапе – от старта с экваториальной эстакады до выхода из плотных слоев атмосферы:

$$\ddot{\varphi} r + 2\dot{\varphi}\dot{r} = 0; \tag{1.2}$$

$$\ddot{r} = \frac{m_р}{m} r\dot{\varphi}^2 - g\frac{R^2}{r^2} - \frac{2\pi Cl}{m}\left(\frac{r}{R} - 1\right) - \frac{k_ф \rho_{а0}}{m}\dot{r}^2 \exp\left[-\alpha_п\left(\frac{r}{R} - 1\right)\right]. \tag{1.3}$$

В уравнении (1.3) первый член представляет собой ускорение от центробежной силы инерции элемента ротора, остальные – от действия указанных выше сил.

Начальные условия задачи

$$\varphi_0 = 0; \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{V_0}{R} = \omega_{р0}; \tag{1.4}$$

$$r_{р0} = R; \quad \dot{r}_{р0} = 0, \tag{1.5}$$

где $\omega_{р0}$ – начальная угловая скорость ротора; V_0 – стартовая скорость ротора.

1.3. Анализ уравнений движения системы в атмосфере

Координата φ является циклической. Интегрирование (1.2) приводит к соотношению, отражающему закон сохранения кинетического момента системы относительно оси Z вращения ротора. С учетом начальных условий (1.4) получим:

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \frac{R^2}{r^2} = \frac{V_0 R}{r^2}. \tag{1.6}$$

Таким образом, угловая скорость ротора уменьшается при его подъеме обратно пропорционально квадрату расстояния элементов до центра Земли аналогично уменьшению силы притяжения элемента к центру Земли, которая определяется формулой (1.1).

Угловое ускорение меняется обратно пропорционально кубу расстояния до центра Земли. Действительно, из (1.2) с учетом (1.6) получим:

$$\ddot{\varphi} = -2V_{р0} R \frac{\dot{r}}{r^3}.$$

Из уравнения радиального движения (1.3) можно определить с помощью условий (1.4), (1.5) радиальное ускорение в начале подъема ротора:

$$\ddot{r}_0 = \frac{m_р}{m}\frac{V_0^2}{R} - g.$$

Вводя безразмерные величины

$$\beta = \frac{V_0^2}{gR} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^2; \quad \mu_1 = \frac{m_0}{m_р},$$

где $V_1 = (gR)^{1/2}$ – первая космическая скорость, получим $\ddot{r}_0 = \left(\frac{\beta}{1 + \mu_1} - 1\right)g$, откуда следует условие начала радиального движения системы «ротор – оболочка»

$$\beta > 1 + \mu_1,$$