Из (3.30) и первого условия (3.32) следует, что в точке x_* параметр $f(x)$ также обращается в нуль: $f(x_*) = 0$. Ищем $f(x)$ в виде линейной функции:

$$f(x) = (x_* - x) f_* = (\beta - x) f_*. \tag{3.33}$$

Подставляя это выражение в (3.30) и (3.31), получаем уравнения движения ротора на заключительном этапе:

$$x = (\beta - x)\left(\frac{q}{x^3} - f_*\right); \tag{3.34}$$

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_2^2 + (x - x_2)\left[\frac{q}{xx_2}\left(\beta\frac{x + x_2}{xx_2} - 2\right) - f_*(2\beta - x_2 - x_*)\right]. \tag{3.35}$$

Множитель f_* определяется с помощью второго условия (3.32):

$$f_* = \frac{\dot{x}_2^2}{(\beta - x_2)^2} + \frac{q}{\beta x_2^2}. \tag{3.36}$$

Первое слагаемое зависит здесь от радиальной скорости $\dot{x}_2$ в точке x_2 и от расстояния точки x_2 до точки орбиты $x_* = \beta$: чем меньше x_2, тем меньше $\dot{x}_2$ и больше разность $\beta - x_2$ при фиксированном β и тем меньше первое слагаемое. Напротив, второе слагаемое увеличивается при уменьшении x_2.

Функция f_* имеет минимум, зависящий от выбора точки x_2. Учитывая зависимость $\dot{x}_2^2$ в (3.27) от x_2, получим путем приравнивания нулю производной $\frac{df_*}{dx_2}$ кубическое уравнение для определения x_2, зависящее, в свою очередь, от выбора точки x_1:

$$x_2^3\dot{x}_1^2 + q\left[\beta x_2\left(\frac{x_2^2}{x_1^2} - 1\right) - 2x_2^2\left(\frac{x_2}{x_1} - 1\right) + (\beta - x_2)^2 + \frac{2x_2}{\beta} - 1\right] = 0.$$

Здесь x_1 и $\dot{x}_1$ полагаем фиксированными; для случая $x_1 = x_0 = 1,\ \dot{x}_1 = \dot{x}_0 = 0$ уравнение упрощается:

$$(\beta - 2)x_2^3 + 3x_2^3 + \left(\frac{2}{\beta} - 3\beta\right)x_2 + \beta^2 - 1 = 0.$$

Анализ этих уравнений не приводится.

Определенную согласно (3.36) функцию f_* подставляем в зависимость (3.33) для управляющего параметра $f(x)$, обеспечивающего выполнение условий (3.32) гашения радиального движения в конце исследуемого этапа. Динамика ротора на этом этапе определяется соотношениями (3.34) и (3.35). Значение силы трения $F_{тр}(x)$, необходимой для обеспечения процесса:

$$F_{тр}(x) = mR^2 f(x)\cos\psi_0 / l_0.$$

Таким образом, получено решение задачи о маневре ротора при обходе группы препятствий и выходе его на заданную постоянную орбиту в экваториальной плоскости с гашением колебаний.

3.7. Задачи о маневрировании ротора в условиях Урана и Сатурна

В качестве примеров преодоления ротором произвольной системы препятствий рассмотрим задачи о маневре в условиях Урана и Сатурна.

1. Планета Уран имеет 10 колец, расположенных компактной группой. Из них восемь, в том числе последнее, имеют заметный эксцентриситет, т. е. форму эллипса; семь колец имеют малое отклонение от экваториальной плоскости.

В таблице 3.1 приведены значения радиусов колец R_i, i – номер кольца, их относительных величин $x_i = R_i/R$, где $R = 26\,200$ км – радиус Урана, и относительных расстояний между кольцами $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Как следует из таблицы 3.1, вся группа колец лежит в границах [1,58; 1,98], откладываемых вдоль оси X инерциальной системы отсчета. Расстояния между кольцами не превышают 0,084, что соответствует 200 км. Учитывая эллиптичность колец, этот промежуток мал для безопасного вывода ротора на орбиту в зоне колец.

Кроме колец, в 1986 г. открыта группа 10 малых спутников Урана; орбита одного из них расположена между восьмым и девятым кольцами, остальные движутся выше зоны колец в пределах относительных радиусов 2,05; 3,28 (таблица 3.2). Последний спутник наиболее крупный, его диаметр 165 км; остальные – от 25 до 100 км; расстояния между ними составляют 10 800–50 000 км.

Первый из ранее известных спутников – Миранда – имеет диаметр 483 км и радиус орбиты 129 000 км (таблица 3.2, № 11, x_{11} = 4,92). Между ним и 10-м малым спутником имеется большой промежуток кольцевой формы шириной Δx = 1,64, или 43 000 км, свободный, как считается, от колец и спутников.