Граничные и начальные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$r = R; \quad v = V; \quad T = T_w = T_s; \tag{5.4}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \varepsilon\sigma\left(T_w^4 - T_\infty^4\right) + JL; \tag{5.5}$$

$$r \to \infty; \quad v = 0; \quad T = T_\infty; \tag{5.6}$$

$$t = 0; \quad v = 0; \quad T = T_\infty; \tag{5.7}$$

$$R_\text{р} = R_{\text{р}0}. \tag{5.8}$$

Здесь $R_{\text{р}0}$, $R_\text{р}$ – начальный и текущий радиус поперечного сечения ротора; T_w – температура поверхности ротора; T_∞ – температура воздуха в невозмущенном состоянии; L – удельная теплота фазового перехода (например, сублимации) на поверхности ротора; J – плотность массового потока, отводимого с поверхности ротора; ε – интегральная степень черноты поверхности ротора; $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ Вт/(м^{2}К^4) – постоянная Стефана – Больцмана; T_s – температура фазового перехода; V_z – осевая составляющая скорости ротора.

В рамках квазистационарного приближения введем еще уравнение динамики испарения защитного покрытия:

$$\frac{dR_\text{р}}{dt} = -\frac{J}{\rho_w},$$

где ρ_w – плотность материала покрытия.

5.3. Приближенный расчет параметров течения воздуха в окрестности поверхности ротора

Уравнение (5.2), описывающее распределение скорости воздуха в окрестности поверхности ротора, можно рассмотреть независимо от (5.3).

Применяя к (5.2) преобразование Лапласа, получим дифференциальное уравнение Бесселя относительно изображения $\tilde{v}(s, r)$ искомой функции $v(t, r)$. Решение этого уравнения при граничных условиях (5.4), (5.6) после их перевода в область изображений имеет вид:

$$\tilde{v}(s, r) = \frac{V}{s}\frac{K_0(r\beta)}{K_0(R\beta)}, \tag{5.9}$$

где $K_0(\xi)$ – функция Макдональда; $\beta = \left(\frac{\rho s}{\mu}\right)^{1/2}$.

Воспользуемся известной оценкой поведения функции Макдональда, согласно которой при больших значениях аргумента $\xi \gg 1$ она убывает по показательному закону [30]. В этом случае решение (5.9) в первом приближении можно представить в виде:

$$\tilde{v}(s, r) = \frac{V}{s}\left(\frac{R_\text{р}}{r}\right)^{1/2} \exp\left[-\left(r - R_\text{р}\right)\beta\right]. \tag{5.10}$$

Применяя к (5.10) обратное преобразование Лапласа, получим:

$$v(t, r) = V\left(\frac{R_\text{р}}{r}\right)^{1/2} \operatorname{erfc}\left[\frac{-\left(r - R_\text{р}\right)}{2}\left(\frac{\rho}{\mu t}\right)^{1/2}\right], \tag{5.11}$$

где

$$\operatorname{erfc}(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \exp\left(-\eta^2\right) d\eta$$

является дополнительной функцией ошибок Гаусса [30].

Из полученного решения следует, что воздух захватывается ротором и приводится в движение во всем окружающем пространстве вплоть до бесконечности. При этом скорость воздуха быстро падает по мере удаления от центральной линии ротора, поэтому для конкретных расчетов допустимо ограничиваться конечной областью радиуса $r_{0\infty}$. Полагаем, что $r_{0\infty}$ – такой радиус захвата, на котором скорость воздуха $v(t, r_{0\infty})$ составляет наперед заданную часть ε_1 осевой составляющей скорости ротора V_z.

При таком подходе радиус области преимущественного течения воздуха представляет собой решение уравнения

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{R_\text{р}}{r_{0\infty}}\right)^{1/2} \operatorname{erfc}\left[\frac{r_{0\infty} - R_\text{р}}{2}\left(\frac{\rho}{\mu t}\right)^{1/2}\right],$$

в котором радиус $r_{0\infty}$ изменяется с течением времени и характеризует условную границу нестационарного пограничного слоя, формируемого на внешней поверхности ротора.